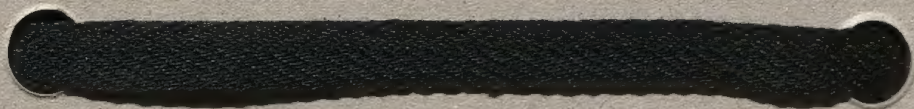


9387

Bibl. lag

IV





99/83

70

Mechanics 1899/
1900

Den Wert $A = \frac{1}{H\theta} \frac{N}{4}$ erhält. Die Dichteunter-

schiede werden daselbst sogar für mikroskopisch sichtbare Volumteile verhältnismäßig groß, so daß die Opaleszenz in eine weibliche Trübung übergeht.

Von theoretischem Interesse ist es, zu bemerken, daß ganz analoge Tyndallische Phänomene auch bei Schallfortpflanzung auftreten müssen, nur ist hier der Einfluß der Inhomogenitäten wegen der Größe der Wellenlänge weit geringer als bei Lichtwellen; sie setzen eine Grenze für die überhaupt praktisch zu verwirklichtenden akustischen Erscheinungen kurzer Wellenlänge.

Diese zufälligen Inhomogenitäten müssen auch bei der kinetischen Theorie der Zustandsgleichung berücksichtigt werden, und ich habe schon vor längerer Zeit an der Hand der van der Waals'schen Theorie darauf aufmerksam gemacht, daß sie insbesondere in der Nähe des kritischen Zustandes die unter Voraussetzung eines homogenen Mediums abgeleitete Zustandsgleichung erheblich modifizieren können.

§ 12. Eine praktisch wohl kontrollierbare Konsequenz möchte ich noch erwähnen, die sich auf die automatisch auftretenden Konzentrationsunterschiede von Gemischen bezieht. Es scheint mir nämlich, daß sich ein direkter experimenteller Nachweis wohl erbringen ließe, und zwar bei sehr verdünnten Lösungen radioaktiver Stoffe oder bei gasförmiger Emanation, bei welcher ja die Zählung einzelner Atome ermöglicht ist.

Einen derartigen Versuch hat auch bereits Svedberg¹⁾ unternommen, aber wie mir scheint, nicht mit Erfolg. Bekanntlich hat Schweidler den Gedanken ausgesprochen, daß dieselbe Formel (2), welche die Veränderlichkeit der Moleküllzahl eines idealen Gases charakterisiert, sich ebenso auf die Anzahl der radioaktiv zerfallenden Atome bezieht, und Bateman hat ebenso die Formel (8) hierfür begründet²⁾. Es ist dies zwar eine Er-

1) Th. Svedberg, Arkiv f. Kemi, Mineral, och Geol., Upsala 4, Nr. 22, 1911; 4, Nr. 25, 1912. Siehe auch K. Herzfeld, Phys. Zeitschr. 13, 547, 1912. Die Unrichtigkeit der Überlegung Svedbergs wird wohl am einfachsten durch die Analogie mit folgendem Beispiel erklärt: Entfallen auf ein Volumen v_1 eines idealen Gases im Mittel $\sqrt{v_1}$ Moleküle, so schwankt deren Anzahl im Mittel um $\sqrt{v_1}$, trotzdem daß man dieselben als Teil eines größeren Ganzen vom Volumen v_2 auffassen kann, daß somit auch die Zahl v_1 Schwankungen im Betrage von $\sqrt{v_1}$ aufweisen muß. Der Zahl v_2 entspricht bei Svedberg die mittlere Anzahl der im betrachteten Teil der Lösung befindlichen radioaktiven Atome, der Zahl v_1 die Anzahl derjenigen darunter, welche im bestimmten Zeitraum zerfallen.

Interessant ist auch eine von E. Meyer [diese Zeitschr. 11, 215, 1910] nachgewiesene Schwankung des Stromes, der durch ionisierte Luft zwischen zwei nahe auf das Entladungspotential gebachten Elektroden übergeht. Dieselbe läßt sich auf die Veränderlichkeit der mittleren Weglänge zurückführen. Es gehört dies jedoch ebenfalls nicht zu den hier behandelten Gleichgewichtsphänomenen. Siehe ferner: K. Herzfeld, diese Zeitschr. 13, 547, 1912. 2) E. v. Schweidler, Congr. Radiolog. Liège 1905. S. 115. H. Bateman, Phil. Mag. 20, 704, 1910.

1

Mechanika

letnie 1899

i zimowe 1899/1900



1
Tawoży, niska cięła; ~~nie~~ ^{po prostu} postawo, więc fizyki, to miedzy innymi
u niej najprostsze.

2
~~Temperatura~~ Fundamentalne pojęcia: Temperatura, ilość ciepła, energia, entropia, potencjał,
praca ~~oraz~~ wszystkie wielkości składowe. Do tego ^{przeobrażenie} do stanu równowagi
Równanie składowe i dla Statystyki dla ^{przeobrażenie} fizyki analitycznej, ^{zamiast} i tak dalej.
Dla tego Statystyka niż mechaniczna, elektryczna.

Rozwiązanie problemu na drodze i rozkład prawdopodobieństwa.

Jaka ^{zadanie} rola fizyki teoretycznej?

Najbardziej odpowiednie odpowiedzi na to pytanie i wielkie dyskusje na ten temat, prowadzi
nie myślę żeby brzydki ^{niezgodnie} fizyk był w odpowiedzi co do zadania tego faktu.
Tylko rozmaite sposoby wystąpienia tej samej rozważań myśli i powołanie
wobec i metodach.

Dawniej powszechnie mówiono o zadaniu: opisywać zjawiska przyrody (lub
materiał przyrody) i wyjaśniać je. (Kwestia o ten zgodzany również metody
nauk przyrodniczych ^{tylko} opisywać).

Kirchhoff podał ^{porównanie} zupełnie inne zadanie: on opisywać zjawiska przyrody
u najprostszym sposobie (właściwie bez "Klasyfikacji"). Porównanie wielka różnica.

~~Wspierający~~ ^{Wspierający} ~~az~~ ^{az} ~~nie~~ ^{nie} ~~dotyczy~~ ^{dotyczy} ~~Klasyfikacji~~ ^{Klasyfikacji}
Kamień spada $m \frac{d^2 h}{dt^2} = mg$

Klasyfikacja to struktura i jej kierunek

Ale czy to jest Klasyfikacja? Co to jest i jak ją pojąć?

Właśnie tylko wyobrażenie przypięcia! Właśnie to ciębień i tożsamość

Akt sam jak w Starogim świecie Radele inżyniera Koliars, pięć kandydatów²
przy egzaminie Staroego pytanie: Czym opisać dół? wyprawa? 3

Odpowiedź ze szkoły uczone: To porada ~~z~~ zdolności wyprawy?

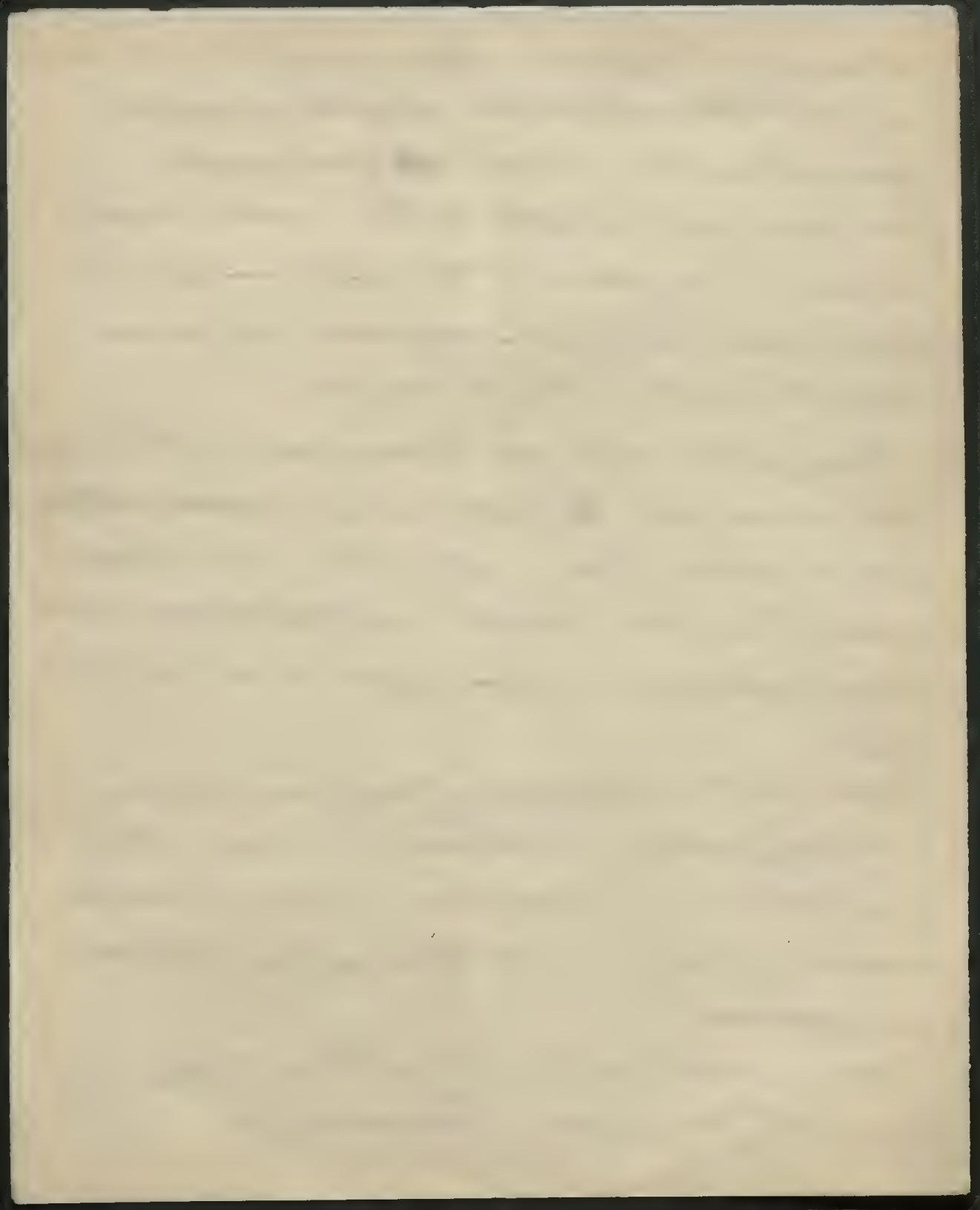
Ale w naszym przypadku nie jest to tak ciekawym bez sensu precyzji, w
porównaniu: że istnieją silne wskazówki, które skonstruować same fakty że to
spadanie kamienia nie jest faktem przypadkowym, lecz regularnym i
zawsze w tych warunkach następuje taki sam ruch.

Ale nie jest to podany przykład, lecz skonstruowanie

Wskazanie zgodzi to być na jedno: to samo czy porównanie: co to nie porównanie
spadającego na ziemi zawsze w ten sposób, że porównanie przyporządkowanie jednostajne
w kierunku pionowym wskazuje, że ten porównanie po prostu: istnieją silne
wskazówki. Jedno i drugie wskazuje nie jest jak skonstruowanie fakty,
jak "opis" fizyka spadania (przy czym oryginalnie "opis" w nieco innym
znaczeniu).

Tak samo mówiono dawniej: Newton wystrzelił "ruch planet skrajnie"
za ich przynależność granitową. Kirchhoff mówi: Ruch planet zostaty
opisane przez Keplera... a równocześnie opis jest Newtona studium ~~z~~
przyporządkowania... lub siły — to ostatnie porównanie jest proste
względnie najprostszym sposobem.

Podobnie np. mówią o oporze "in extenso" wyrażenie fizyka elektryczności, albo
daje się podać ^{system} równań Maxwella: To najprostszym sposobem.





Took same mobile ^{post} sitting room.

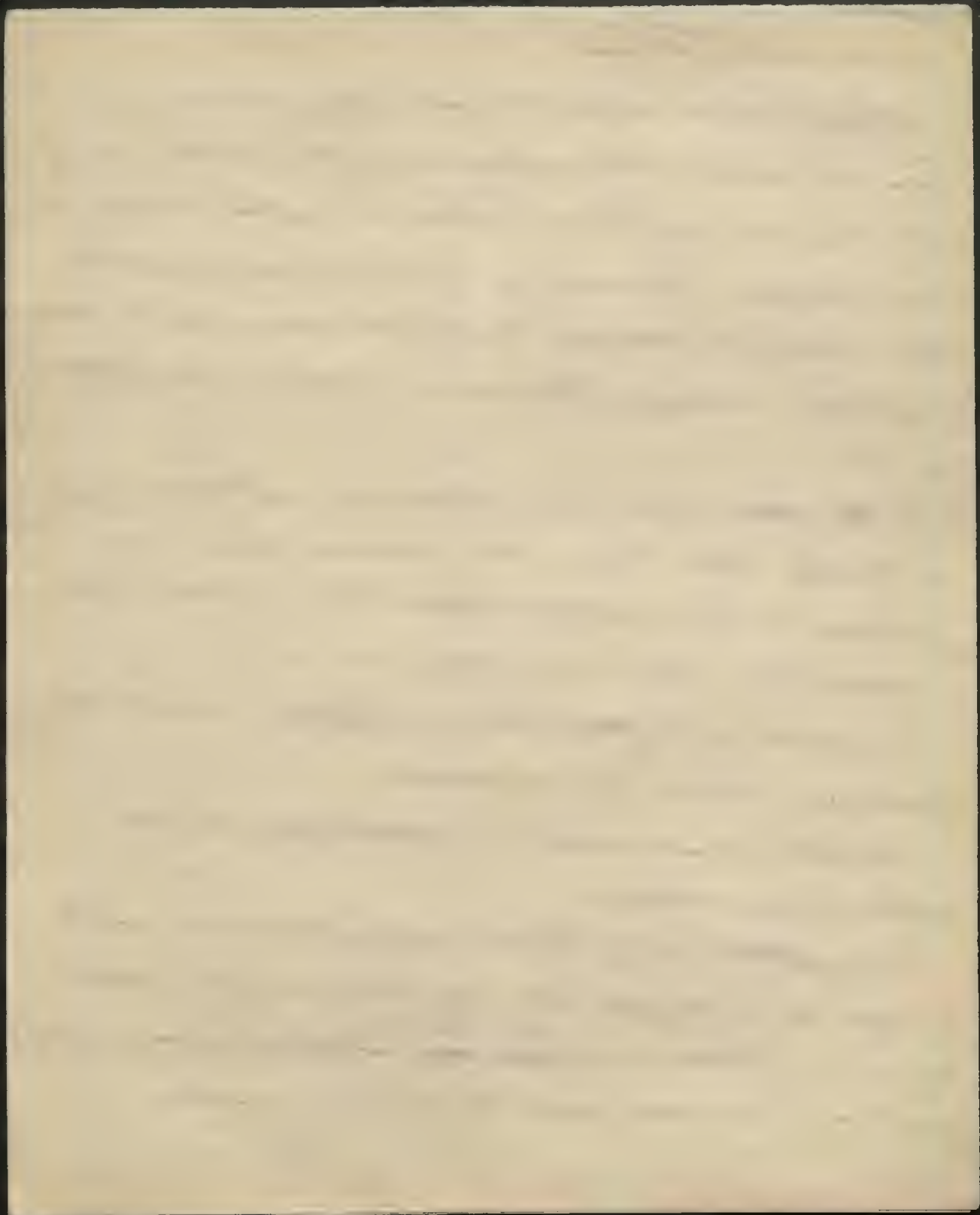
Historja nauki ucy nas ze znanosci ucyto zapetrzowane do tyh tyh,
Tuzo mis., umiety, sloty, zapetrzowie inne mozte mechanizmu, ale ucyty
potep w tym ze sie ucyty zblizy i ^{fuzy} do ucyty i ze ucyty moze
skus zotrovanie ~~Tak samo jak ucyty~~. Nie by ucyty zotrovanie tyh mozte
tyhke z adowod. witei kedy potep tak jak: kedy potep, piewa kedy, kedy,
kedy sloty, konstruoye zapetrzowie inne ale potepi tym e potep w poytowanu
do ucyty.

Te trzy ~~rodzaje~~ drzewina nie są istotnie różne: myślisz może podległości pod Kirchhoffa. Także Boltzmann obcy i mechanizm obijający równania różnicowe bo i to jest mechanizm ~~drzewa~~ drzewy podległości tej rzeczy. a podległości Macha "względnie" mierzalnej rozpręgni na —

Alte organizacii jst to ~~z~~ wyrazne jst przylek Meda do metody
fenomenologii, Poltrman. do mechanizmów.

Ovis metody opromenie cerne : do najdlhsioho zbytku depozitov
vstah : idy na nankovst.

Bo co ~~jest to~~ rykosany otolacanie znakosty tchod endzich lub moze?
Nii tyko ie rykosany enne farta zonyi rowdny ni obyste; pnykty;
enymoni ich otolona, ale ty ^{just to wotem do} ~~just to wotem do~~ pru rykosany konsekrony, rykosany,
po to co byto wadonem /osyrychni to zawnie tyko z nupowonow/.



2. jutra : druga metoda udrugaj' plodne i toksi umski;

Hydromechanik, Wärme & Licht, mechanische Systeme.

selektivnosta na postavit kolombe etc.

interes je da se termodynamika ponaša s tokom vremena

2 drugi stony mechanizm, model:

čtyř jako plyn : Fourier, - - - -

Elektron je nabit: negativno elektr.

Teorya molekula: Kader, Prinsip rancangan eksperimen

Muchan. troya stem: Russell when sister.

Kinet. tiga per: Raksasa stam, teri on, paku, dip. st. et.

Wtedy też powstał: ~~Kapitan~~ Jęko Pasow, termody. dr. chemii

fizjologiczne; obciążenie praw zjawisk cieplnych zapomoc rośnin i zastosowanie ich do najważniejszych przypadków, bez robienia hipotez co do natury ciepła kontynuacji molekularnej i naturalnej

on high seas, those policy? no response to the

z wyjątkiem: niektóre rzeczy mający powstawać na 7 polowie; to będzie wyjątek

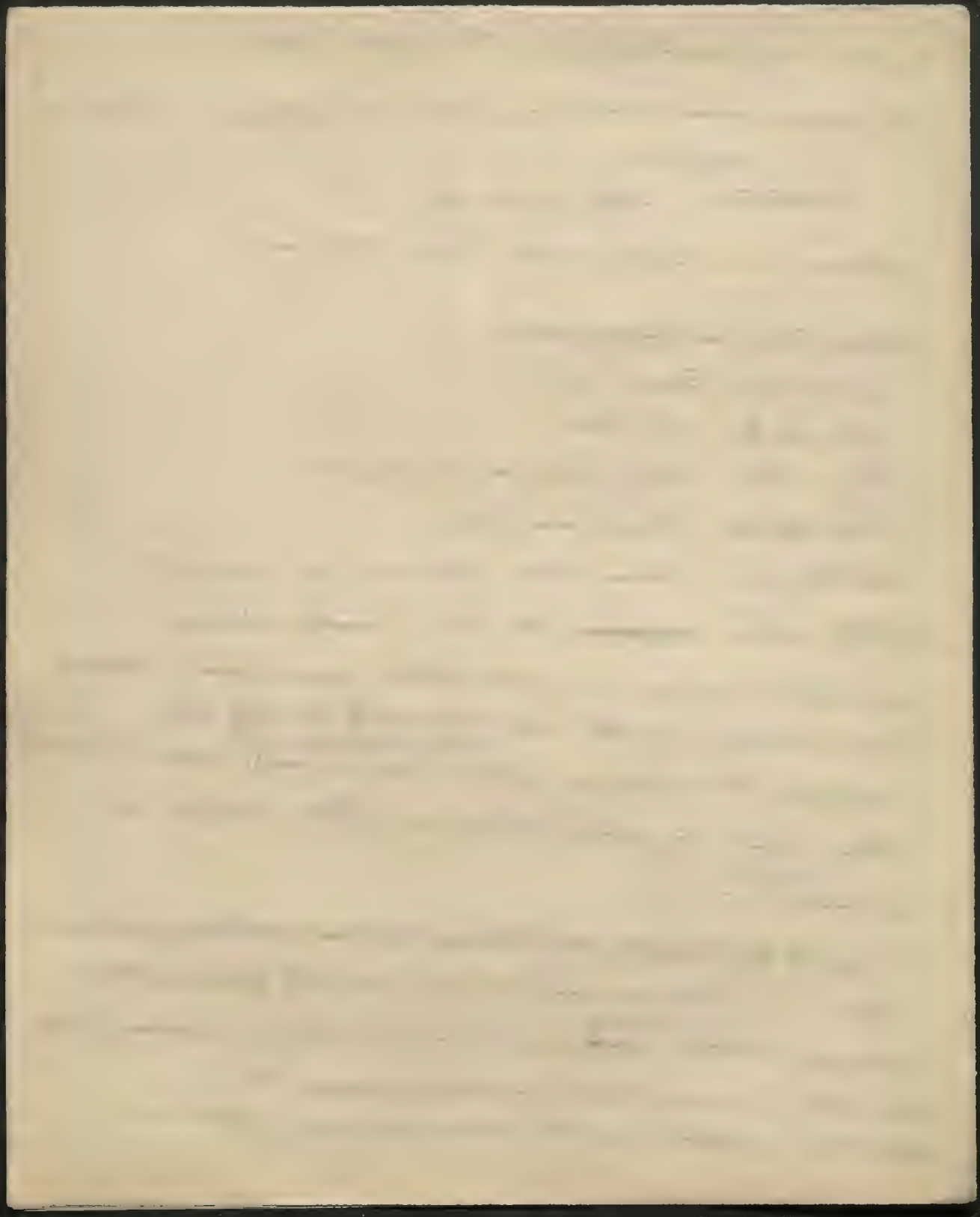
only Polk. - Reside
much and some in south -

2. ~~to prove~~ ~~is~~ ~~turning~~ ~~us~~ ~~oblivion~~ ~~of~~ ~~the~~ ~~brain~~ ~~&~~ ~~higher~~ ~~perceptual~~ ~~power~~
turning us now wondering who really fundamental

W ² ~~kręgowych~~ ^{kręgowych} podział na ~~klasę~~ ^{typy} zwisłe obrotowe (stopy) i niewrotne (kopy)

Łódź w dniu 0°; zmiany stanu skupienia, rozpręż. pędzenie 17°.

Przech. temp. ; promienion.; przedkosi 2 kłoty wstępnymi porow. 2 d. w. do kłosa.



10
Fryke trout, & 3 lake, thermid., med., electr.

Nanka o jariskach depluyt

Praciny obim na obzor tipo predmista

Nadimogaj rosliny, wiodni i zakres rozstach miedzy znakami przy miedzy

Do nie ogranicza się wcale złączenie ~~do~~ do granic zmienną temperatury

Smektyje voljeje yvariske fis. albo besposred. potjez one u yvarisk. neplenuo albo u ludy
zelenosti u tokach yvarisk

Druga nadzwyczaj ważna ogólna prawda:

1. Čistá energie : zcela zachovaná energie

4. *Esoda cornuta clausura*

~~Najbardziej~~ kocha ciepło, kładzie się przy. posiada pewną energię, która ^{pomaga mu} ~~przeżywać~~ ^w nie
różne formy, ale zawsze dąży do zamienienia w energię życia.

Też się niekiedy zdarza, że ktoś, samemu nie wiedząc, że jest
 = jest energią. Drugie prawo mówi, że do ~~tego~~ ^{tego} wstępnego jakiegoś zjawiska
 są motywy.

Toromania 2 in my drinking:

Kiedy przewidział nas stającego ^{poroża} jelenia wartości tej. gdyby się spodziewał tego
za niego można dostać parę iłost piwiskich. Różnica w postaw. z energią biegnącą
tylko że nie tak a jego masywne ściany okryte są zieloną, podnoszą się i znowu
codziennie z wartości tego jelenia ^{maga} ~~być~~ więcej 3 fl. a i tak da nam tylko 1 fl.

Pomysłowy to wciąż winić moim tożsakiemu i jego wadom. Jednakże bodaj z punktu
widzenia wyłączenia finansowego — jest to drugi w ekonomii politycznej — co byle
nam należy z bodawiem program z punktu widzenia energetycznego.

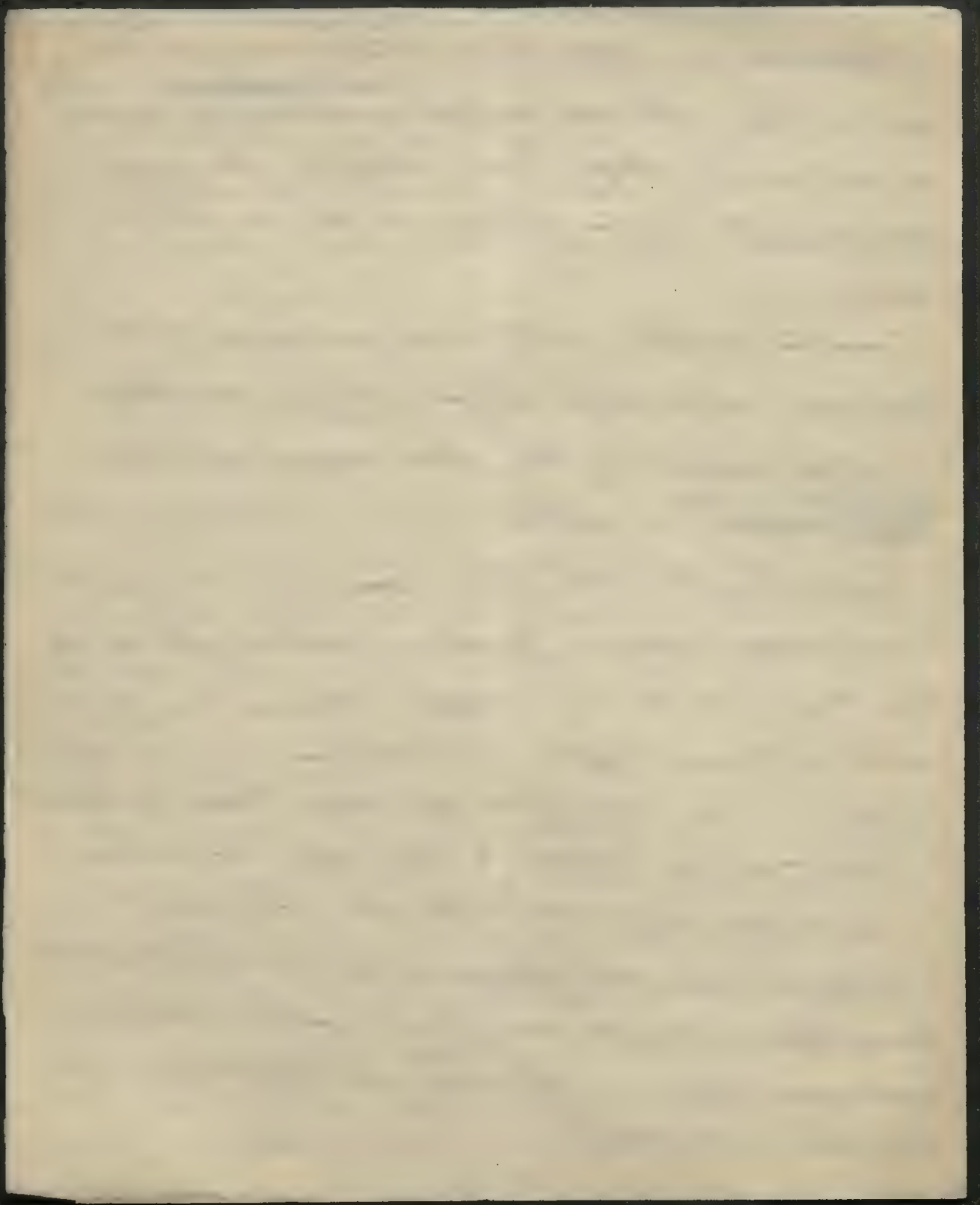
Naturalnie, że mówię tu tylko o pewnych ujęciach energii jako ^{typu 10} jedynic 8
realistycznie istniejącej i metod energji jako jedynic ~~innych~~ ^(i innych ujęciach) ~~innych~~, do których
nie myśli zaprzeczać zastępcy. Stąd i użycie go na polu fizyki
rozwił tych metod. Dwie tu już dokonano ale drugie jeszcze do
zrobienia.

Ważniaczką wchodzi tu o rachuby bardzo cenne stosowanie fizyki
do roślinozby ; nieobracalnych lub jak się tu głosi można statystyki
i kinetyki termodynamicznej, które zupełnie analogiczne jest do równ-
stania równowagi i ^{mechaniki} ~~statystyki~~ i kinetyki w mechanice.

Topnienie lodu przykład pierwszego rodzaju : ~~cała~~ kawał lodu 0° w wodzie 0°
i równo sobie, ~~nie~~ zmienia się. Ciepło zawarte doprowadzenia ciepła topu, przy
odroś. Kropki : proces odwracalny. ~~Przykład~~ Istotą samego rodzaju ułożenie
zmienny stan skupienia (z wyjątkiem zjawisk podłożenia st.!) i wiele innych
zobowiązanych ujęć i zakres chemii jako różne rodzaje dysocjacji, tworzenia się związków

Przykład drugiej klasy : rozchodzenie się ciepła w różnych kierunkach
wielkości nie drugie. Tak samo promieniowanie ciepła i wiele innych.

Otoż dotyczy chłodu i ogólny moment jest wspomniany ożył dwóch przed tymi ujęciami
pierwszego rodzaju. Co do ujęcia kinetyki termodynamicznej, omówiłem to tylko o jakimś
bliskości zmian następi z.t. że ciepło z mierzalnego ciepła przepływa do tego ale nie
z jakiegoś przelotnego ujęciem następi.



qui nous paraît le plus simple et
no clair, le mouvement."

5

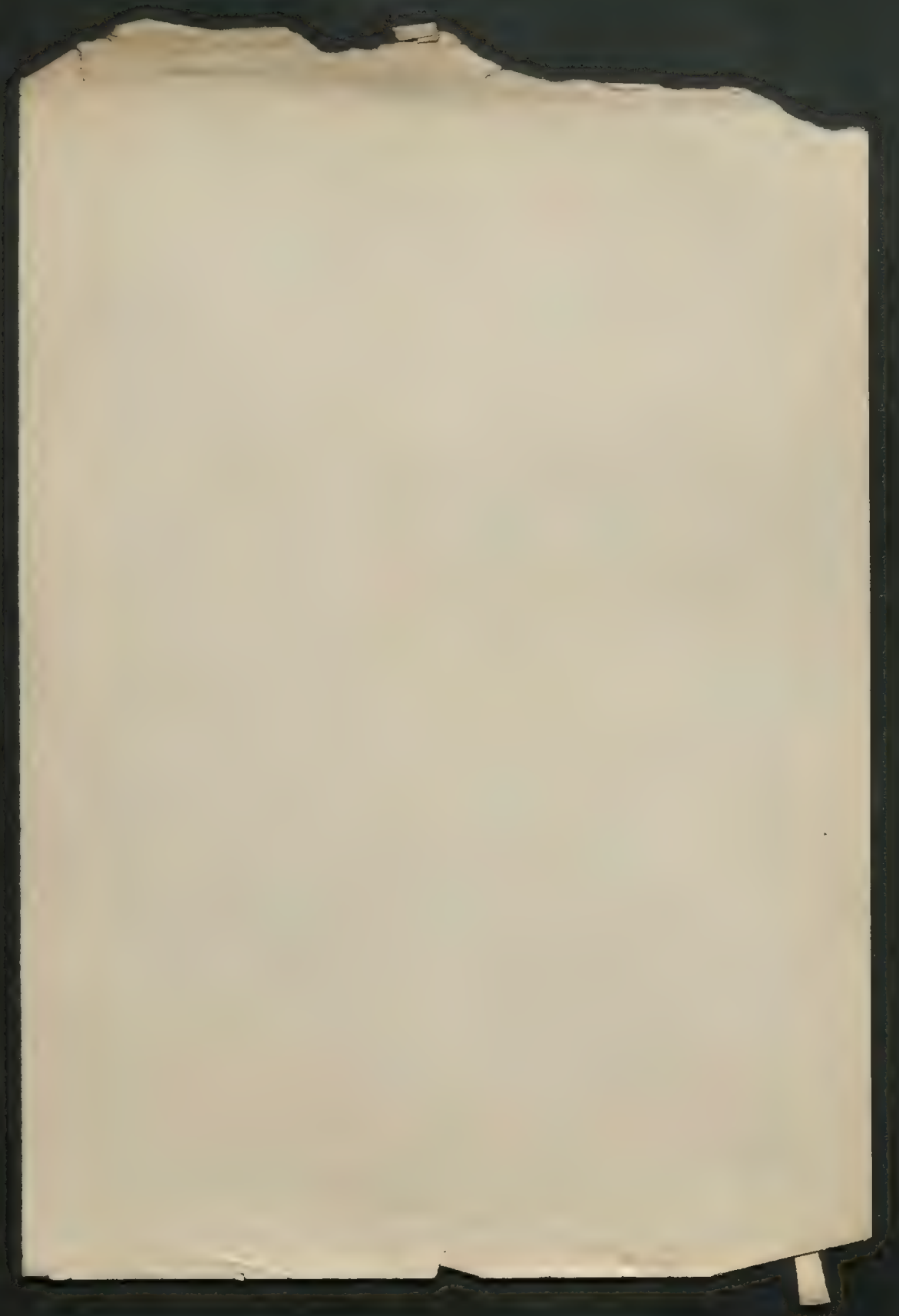
Jamin (Cours élém. de Phys.) : La Physique sera un jour un chapitre
de la mécanique générale.

Volle (Cours de Physique 1884, préface) La Science de la nature tend vers
la mécanique par une évolution nécessaire, le physicien ne pouvant
établir de théories rigoureuses que sur les lois du mouvement.

Coin
Descartes : il n'y a dans le monde physique que de la matière et du
mouvement.

Lord Kelvin : Il me semble que le vrai sens de la question : Comprendons
nous ou ne comprenons-nous pas un sujet particulier en physique
est : Pourrions nous faire un modèle mécanique correspondant ? Je
ne suis jamais satisfait tant que je n'ai pu faire un modèle
mécanique de l'état ; si je puis faire un modèle mécanique, je
comprends ; tant que je ne puis faire un modèle mêm. je ne comprends pas.

Mécanique est l'étude des phénomènes réversibles









13

~~Andersom, Men om sig omringing sig till de de de betydning någon och lite på Arbet~~

Przegląd do wyliczenia przed tego rachunku.

znajomo liter ^{sety kroki} (minimalko) alfabetu do sumowania wektorów. W piśmie opowiedzi niektóre ^{2 tył} smukł

može se videti, da moram biti porabljen ^{za n.p. pri} ~~polkreslami~~ ^{oktobri} ~~oktobri~~ ^{c. 2. tona} c. 2. tona

James just to say that my good morning and his signature (probably under the letter)

~~para~~ nicht durch anterior vordringend. Durch die anterior vordringend vordringend an der para operculum
nach Tschirski.

~~And~~ I hope morning in a newspaper by word: powder: shot character: any just pass they
done, rise ^{newspaper} ~~newspaper~~ take ^{draw} ~~shot~~ ^{safety} ~~shot~~ ^{ironing} all things to try done ^{judicious} ~~is~~ ^{not}. Just to deficiency?

vektor = 15 računski vektorev. Tudi znotraj $a=b$, to znači: če sta dva vektora enaka
(to pomeni: 2 črte)
to nam pomeni, da sta 2 vektora enaka in jst jih imamo, saj $a=b$.

2 klänge punkten und die verfahren von kreislaufe, die jetzt meine empfinden abgeben.

nl

o o

st

pr
rwr

N

si

r

m

sa

s

i

t

o

h

pr
(

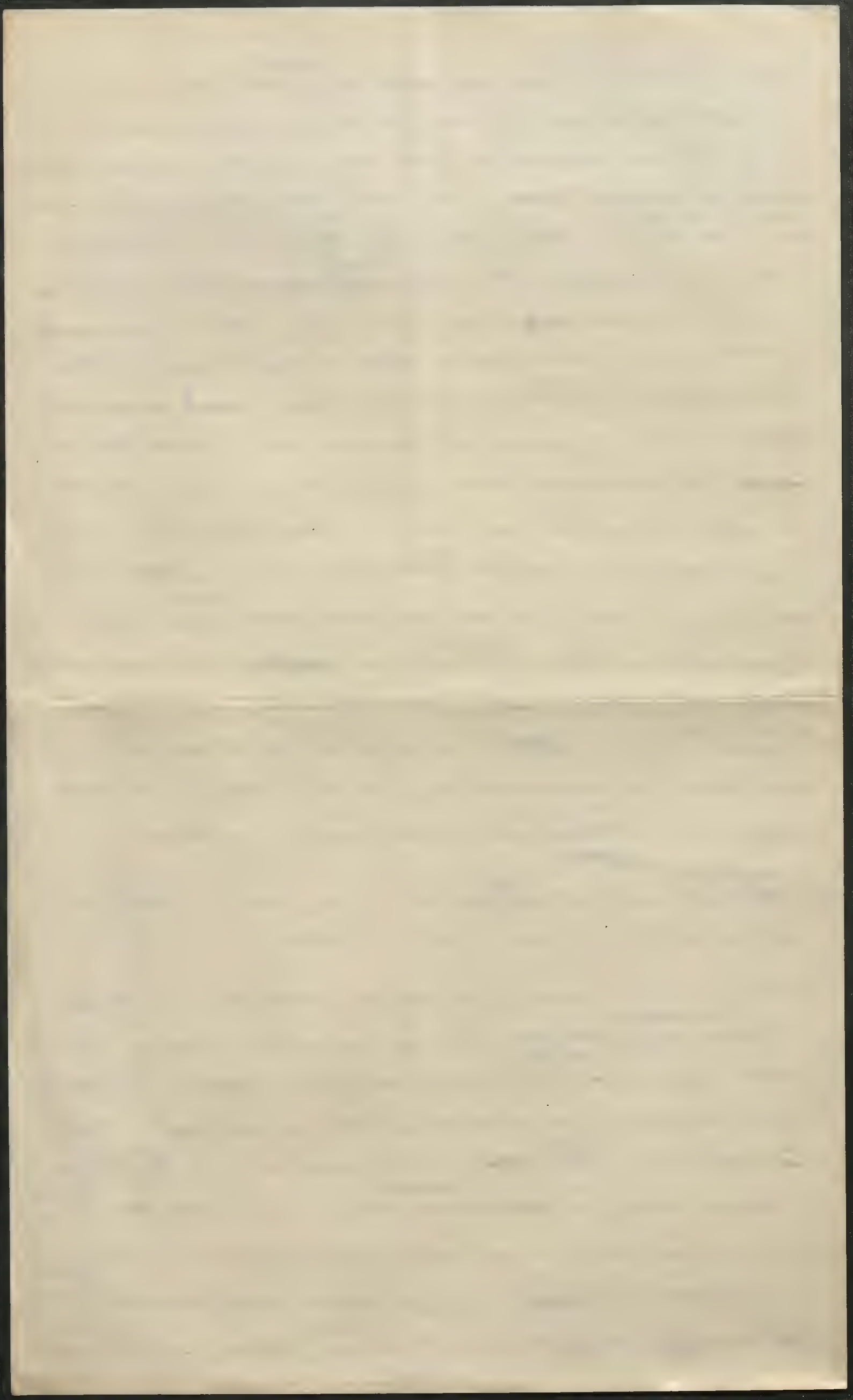
to

a

-

2

3



... von St. John, James
 wie den zusammenfassenden
 Svedberg, Arkiv f. Kemi,
 Upsala 1911; J. Perrin,
 Angew. Zellschr. f. Kolloide

1) Es ist da nämlich abzuändern, falls die Gasmoleküle vergleichbar sind des sich bewegenden groß im Vergleich zur umgekehrt proportional Querschnitte des Teil- der Molekulargeschwin- nimmt dann die Brown- akurierung stark zu, wie te beobachtet hat. Eine Kontrolle ist da wohl noch ist zufolge der neueren, klassischen Gleichung be- nicht zu zweifeln, daß ilt, und ist aus denselben herbei auftretenden, von fenhheit der Teilchen ab- Zahlenkoeffizienten abzu-

Weiß²) nachgewiesen, Versuche Ehrenharts, Gasanischen Messungen der Gasem Widerspruch stan- auf die Brownsche Be- nhaft beobachteten ultra- nen und auf deren Ab- Kugelgestalt zurückführen nun zum Falle über, wo der Gleichgewichtslage e entgegengewirkt, also die re Funktion ist — was günstliche Begrenzung des feste Wände, erfordert. Beispiel dieser Art ist die ere erfolgende Verteilung rdünnten Emulsion, wie errin³) und seinen Mit- Gummigut- oder Mastix-

thermodynamischen An- üben sich die Teilchen den ansammeln, falls sie umgebende Medium. Da- tatsächlich nach Formel tischen Exponentialgesetz o, daß ihr mittlerer Ab- n einer Arbeitsleistung

eraus für y sich ergebende für die Höhe der aus deten Atmosphäre. Als se Erscheinungen vorher- Ber. 116, 1175, 1907; Broglie, 121, 1912.

$$\frac{H\theta}{N} = 4,1 \cdot 10^{-14} \text{ Erg}$$

betrachteten Volumen V so wenig Moleküle n zu kommen, daß man n und ϕ nicht mehr als kontinuierlich Veränderliche ansehen darf. Für

7) M. v. Smoluchowski, Boltzmann-Zellschr. S. 626, 1904; Ann. d. Phys. 25, 205, 1908.

die Wahrscheinlichkeit, daß sich in diesem Falle n Moleküle eines idealen Gases in einem Volumen befinden, welches normalerweise deren n ent-

$$W(n) = \frac{n!}{n^n e^{-n}} \quad (8)$$

halten sollte, habe ich die Formel abgeleitet:

aus welcher man leicht findet, daß auch hier die Formel (2) für das Schwankungsquadrat gültig bleibt. Dies hat Svedberg¹) benutzt, um in einigen sehr interessanten Arbeiten die Gültig- keit des Boyle-Charlesschen bzw. van't Hoff- schen Gesetzes für die Teilchen kolloidaler Goldlösungen, Quecksilbersuspensionen- und Gummigut-Emulsionen zu kontrollieren, indem er systematische Zählungen der Teilchen an- stellte, welche sich in bestimmten Zeitintervallen im mikroskopischen Gesichtsfeld befanden. Es ist das eine verblüffend einfache Methode zur Erforschung der Gesetze des osmotischen Druckes für solche Suspensionen, welche sonst direkter experimenteller Forschung schwer zugänglich sind. Das Resultat dieser Messungen war, daß tatsächlich die Teilchen verdünnter disperser Systeme sich in bezug auf die Zustandsgleichung genau so verhalten wie die Moleküle eines idealen Gases, daß jedoch schon bei relativ sehr geringen Konzentrationen, wenn die Abstände der Teilchen noch hundertmal größer sind als deren Radien, bereits sehr erhebliche Abwei- chungen vom Boyle-Charlesschen Gesetz auf- treten, und zwar so, daß die Kompressibilität geringer, also der osmotische Druck größer wird. Man kann dies natürlich nicht dem Eigen- volum der Teilchen zuschreiben, welches als b in der van der Waalschen Gasgleichung auf- tritt, denn dies gäbe nur ganz unmerkliche Kor- rekturen, sondern man muß schließen, daß die suspendierten Teilchen bei Annäherung eine spezifisch abstoßende Wirkung ausüben. Was deren Ursache ist, wird sich erst entscheiden lassen, wenn ein weiteres Versuchsmaterial vor- liegt. Man kann an Wirkungen kapillarer, vielleicht auch elektrischer Art denken. Über- haupt muß man aber bemerken, daß man die Analogie zwischen Gasmolekülen und suspen- dierten Teilchen nicht zu weit treiben darf, denn die Art der Bewegung ist doch erheblich ver- schieden. Benachbarte Gasmoleküle wirken auf- einander gar nicht ein, außer wenn sie zusammen- stoßen, während die sich bewegenden Emulsions-

8) Th. Svedberg, Zellschr. f. phys. Chem. 73, 547, 1911; Zellschr. f. Kolloide 8, 219, 1911; Th. Svedberg u. Katsuji Inouye, Zellschr. f. phys. Chem. 77, 145, 1911. Eigentlich benutzte Svedberg nicht das mittlere Geschwindigkeitsquadrat, sondern den Mittelwert der ab- soluten Abweichungen $|\delta|$ zur Vergleichung, für welchen ich erhalten habe: $|\delta| = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$, wo σ die größte ganze Zahl ist, welche gleich oder kleiner ist als $\frac{\pi}{2}$. Es kommt das ungefähr auf dasselbe hinaus.

416

10

205

2

W. H. H. H.

2

11. K. 101

17

vornherein plausible Annahme einzuführen, daß in diesem Falle — d. h. bei unvollständiger elektrischer Teilchenentladung — nur ein gewisser Bruchteil ϵ der Zusammenstöße verflut. Wie groß dieser Bruchteil ist, darüber wissen wir von vornherein nichts weiter, als daß er in hohem Grade von der Doppelschichtladung abhängt; es wird sich aber zeigen, daß wir ihn „a posteriori“ aus den empirischen Resultaten bestimmen können.

Unter dieser Annahme würden offenbar genau dieselben Formeln (69, 70) auch in diesem allgemeinen Falle gültig bleiben, mit dem einzigen Unterschied, daß überall das Glied βt durch $\epsilon \beta t$ zu ersetzen ist. Es folgt also ohne weiteres der wichtige Satz, daß die bei verschiedenen Konzentrationen des Kolloids und des Elektrolyten erhaltenen Koagulationskurven ähnlich sein müssen, in dem Sinne, daß sie durch eine entsprechende Änderung des Zeitmaßstabes zur Deckung gebracht werden können. Die zur Erreichung eines gewissen Koagulationsgrades erforderlichen Zeiten sind also umgekehrt proportional dem Produkte (βv_0).

Tatsächlich ist die Ähnlichkeit der Koagulationskurven durch die Untersuchungen von H. Paine an $Cu(OH)_2$ -Solen und teilweise auch

¹⁾ Vgl. z. B. L. Boltzmann, Gasttheorie II, S. 213. Sonst hat Boltzmanns Theorie, welche sich nur auf den Zustand statistischen Gleichgewichts bezieht, nichts gemeinsam mit den hier behandelten Erscheinungen der übersiebeln Koagulation.

²⁾ H. Paine, Kolloidchem. Beif. 4, 24, 1912; Kolloid Zeitschr. II, 145, 1912; N. Ishizaka, Zeitschr. f. phys. Chem. 83, 97, 1913; H. Freundlich u. N. Ishizaka, Koll. Zeitschr. 12, 230, 1913; Zeitschr. f. phys. Chem. 85, 398, 1913. Eine Weiterführung dieser Untersuchungen in der kürzlich erschienenen Arbeit von J. Gann, Kolloidchem. Beif. 8, 63, 1916.

jene von H. Freundlich u. N. Ishizaka an $Al(OH)_3$ -Solen empirisch konstatiert worden.

Wirkung des Umrührens läßt sich leicht begreifen.

Denken wir uns nämlich die Flüssigkeit in scherende, lamellare Bewegung versetzt, so müssen die Teilchen, auch falls sie gar keine Brownsche Bewegung ausführen würden, mitunter mit ihrer Wirkungssphäre ineinandergreifen und aneinander kleben bleiben. Die Größenordnung dieses Faktors erkennen wir schätzungsweise, wenn wir uns den Mittelpunkt eines Teilchens, samt seiner Wirkungssphäre R , als feststehend vorstellen und berechnen, wieviel fremde Teilchenmittelpunkte im Falle lamellarer Strömung längs der $z=0$ Ebene in der Zeiteinheit diese Kugel R durchstoßen würden.

Da die Geschwindigkeit im Abstände z gleich ist $z \frac{\partial u}{\partial z}$, wird der gesuchte Ausdruck für den Querschnitt der Kugel R :

$$2v \frac{\partial u}{\partial z} \iint 1 dy dz = \frac{4v}{3} R^3 \frac{\partial u}{\partial z} \quad (72)$$

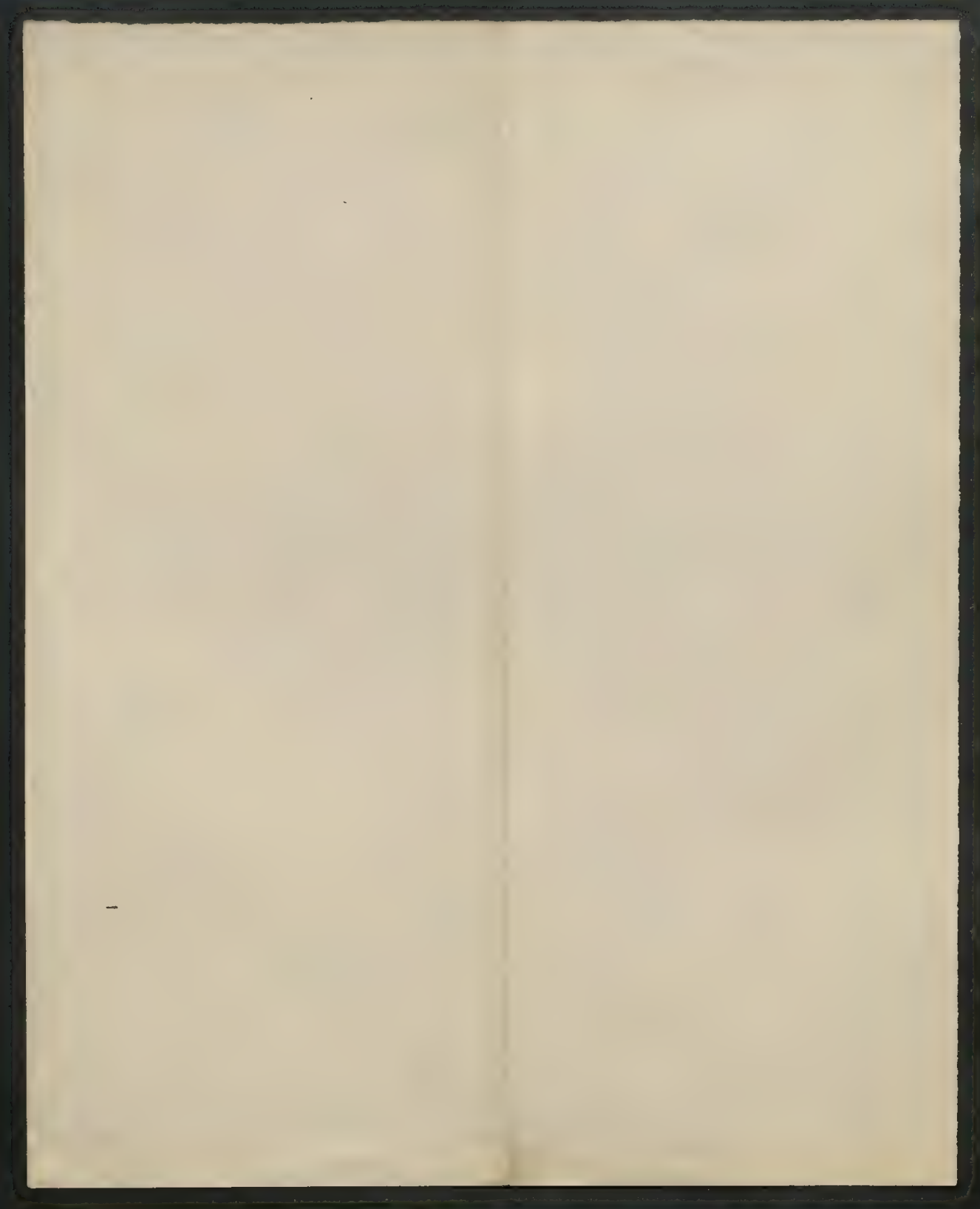
Der relative Einfluß des Strömungsfaktors ist gegeben durch das Verhältnis dieses Ausdrucks zu der infolge der normalen Brownschen Bewegungen sich anlagernden Menge $8\pi v D R$, welche beträgt:

$$\frac{1}{6} \frac{\partial u}{\partial z} R^3 \frac{N}{HT} \mu a R^2 \frac{\partial u}{\partial z} \quad (73)$$

Die koagulierende Wirkung des Umrührens wächst also ganz außerordentlich mit der Teilchengröße; wird $R=2a$ angenommen, so würde z. B. bei einem Teilchenradius $a=\sqrt{\mu v}$

Geschwindigkeitsgefälle $\frac{\partial u}{\partial z}=1$ nur eine Vermehrung der Koagulationsgeschwindigkeit um den Bruchteil 10^{-6} bewirken, während dieselbe bei einem Teilchenradius $a=1\mu$ dadurch auf das Doppelte des Normalwertes gesteigert würde.

Kurz gesagt: energisches Umrühren bewirkt rasche Koagulation der mikroskopischen Teilchen, läßt aber Submikronen und Amikronen unbeeinflusst.



Toxica starigynus, Saccardo

Ant. Adnot.: kłosa zwieszona i gwoździ, piwnice i szklanka, piwnice i papuszek } ~~szklanka~~ szklanka
 szklanka i chustka, prz. na nitkach, ~~szklanka~~ i
 nitki i pilnik, włoski z uszkiem i grzebień } szkl. szkl.

Wzrost następuje znacznie później, niż u roślin?

Exemplar de Peni: Idolul stranie foarte usor: magus: ielaso na dintr-o horka de, Diolysla Tura
 repach zovissory, rura i gresire, Waferschite
 ology abstruse pe mory

Polstnie i cudo i slens, tytko mado slens mierszowy ; isobk mazy parstoji mierszowy

(Dobroho popisu do nasy) Spis obchodu ^{stomaku} ~~med~~ z gram

Delo Adrijan bledavca: radej kot vpliven niti junostanec

Równia pochyła, Stwood ~~Wzrost~~ $s = \frac{g}{2} t^2$

wynytkin cŁe rŁowni myŁko, wchodŁa z tŁark; i ławie, rŁowne kŁe po rŁowni po dŁugŁy; nŁe pŁowinŁe

$$f = a_m$$

$$f = g^m$$

opólni: $f = mw$

(römisches system kryptographischer Zeichen)

Stuud bliz mit

Newton ~~was at that time~~

chromogeniczne, tynogeniczne i wchł. superpozycja ~~nie~~ przedkisi

oprijine poigine pruzgplacenta = muncunoi pe stiori

Parabola recta: Wurfgeschwindigkeit, steige und

balistyk.

nach jehortafung po kole

Circaea, kula plurima etc.

McLanahan 2 vols

Kamień - przyni

Prava Kipluo, Norton, prastayo

~~Wichita~~ Ruchy dygga, (sprzysto)

wchadla motenit

Praco, mogo klut i potu ycho, wy. the porbongi 2 tyo paktu wchadla. maching prate

Logo, wicnie etc.

momenty, inoda chetkoti

and chetkoti byp, moment kunkardoni

wchadla nanyjine

Kaziki winyga, pracya, etc

Sprzysto' cat stolyh

ciem

Kaplan weist mittels mathematischer Analyse des in Österreich kommenden Verkehrsbedarfs
problematisch, dass das von ~~der~~^{den} ~~Verkehr~~ angewandte Verfahren mittels solcher Pläne aus

Ad. Green

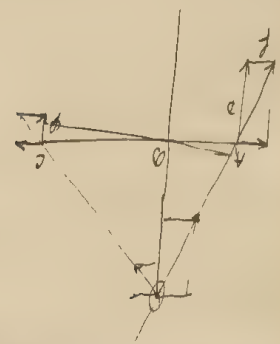
Kopf zeigt dass die von Fletcher unterhaltenen Ideen der Bewegung kleiner Tropfen,

Bei der in Rede stehenden Versuchsanordnung handelt es sich um die Konstruktion von Fallbügeln
und Ösen, nur Bewegung und um die Frage, wie ^{jene Bedingtheitsanteile} (aus widerholten, ~~stetigen~~ ^{einzelnen} ~~Ballstößen~~
entstandenen Fallentwürfen) ^{Ausgangspunkt der} nachweislich aus einander sind. Verfasser untersucht die exakte
math. Theorie dieses Problems, woraus folgt dass die von H. P. Putzke gegebene Formel mangelhaft
ist, dass das von H. W. W. angewandte Verfahren richtig ist.

$$f - \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$g = 978.06 [1 + 0.005192 \sin^2 \phi]$$

$$f = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \phi + \frac{1}{2} \sin^4 \phi + \dots \right]$$



$$AD : AD = f : r$$

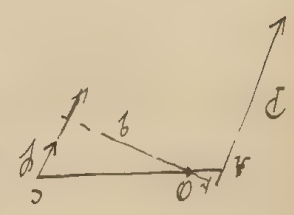
$$AC : AD = f : r$$

$$AD : AC = r : r$$

$$\frac{AD}{AD} = \frac{r}{f}$$

$$\frac{AD}{AD} = \frac{r}{f}$$

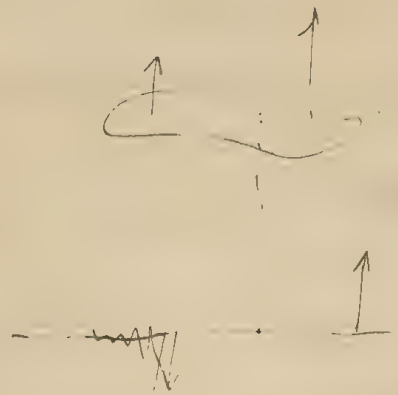
$$f : AD = r : AD = r : r$$



$$\frac{AD}{AC} = \frac{r}{f}$$

$$r : f = r : f$$

$$r : f = r : f$$



~~dx/dt~~

$$u = V \cos \varphi$$

$$v = V \sin \varphi$$

$$\frac{du}{dt} = -k V \cos \varphi = -k V u = -k u \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = -g - k V \sin \varphi = -g - k V v = -g - k v \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{V} \left(u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} \right)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{V} \left(u (-g - k v \sqrt{u^2 + v^2}) - v (-k u \sqrt{u^2 + v^2}) \right) = -\frac{g}{V} \cos \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{V} \right) = -\frac{g}{V^2} \cos \varphi - \frac{k}{V} \sin \varphi$$

$$\left(\frac{dV}{dt} \cos \varphi - V \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) \cos \varphi = -\frac{g}{2} \cos \varphi$$

$$- \left(\frac{dV}{dt} \sin \varphi + V \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) \sin \varphi = -\frac{g}{2} \sin \varphi$$

$$V \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g}{2} \cos \varphi$$

$$\frac{du}{dt} = -k u$$

$$\frac{dv}{dt} = -g - k v$$

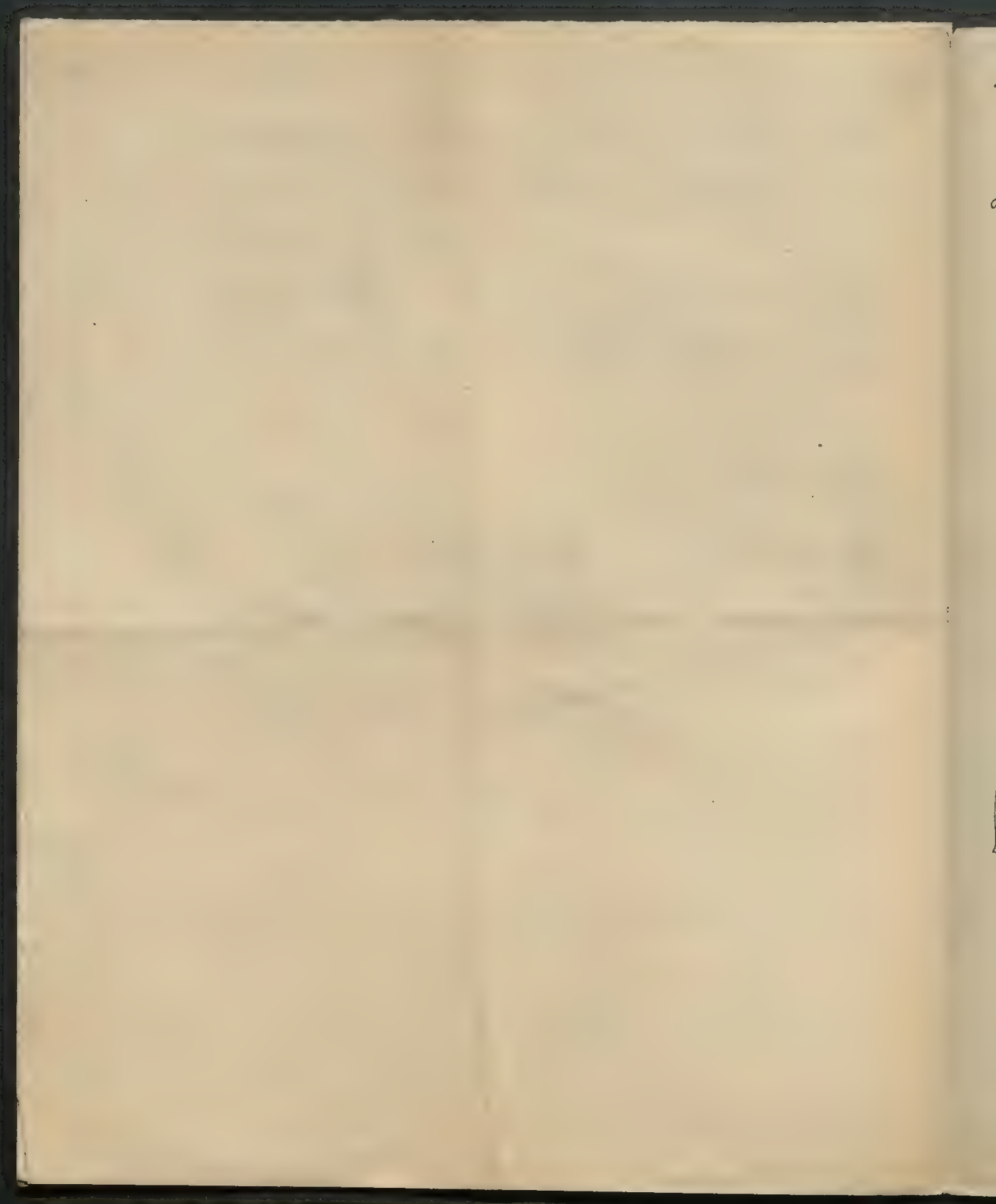
$$\frac{dv}{dt} + k v = -g$$

$$\frac{d(v + \frac{g}{k})}{dt} + k(v + \frac{g}{k}) = 0$$

$$v + \frac{g}{k} = e^{-kt} \left(v_0 + \frac{g}{k} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y = Q_1$$

$$y = e^{-\int P_1 dx} \left[c + \int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx \right]$$



$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -g - \beta \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{1 \frac{dy}{dt}}{g + \beta \frac{dy}{dt}} = -\beta$$

$$\ln(g + \beta \frac{dy}{dt}) = -\beta t + c$$

$$\ln(g + \beta \frac{dy}{dt}) = c e^{-\beta t} - g$$

$$\beta y = -\frac{g}{\beta} e^{-\beta t} + g t + \alpha$$

$$y = -\frac{1}{\beta} g t + \left[\frac{c \cos \alpha}{\beta} + \frac{g}{\beta^2} \right] [1 - e^{-\beta t}]$$

$$x = \frac{c \cos \alpha}{\beta} [1 - e^{-\beta t}]$$

$$y = \frac{g t}{\beta} + \frac{g}{\beta^2} [1 - e^{-\beta t}]$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t} \quad \left(\frac{dy}{dt} = -g + g - \alpha e^{-\beta t} \right)$$

$$-\frac{g}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} = c \sin \alpha$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = c \sin \alpha + \frac{g}{\beta}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{\beta} + \left[\frac{c \sin \alpha}{\beta} + \frac{g}{\beta^2} \right] e^{-\beta t}$$

$$g = (g + c \beta \sin \alpha) e^{-\beta t}$$

$$T = \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{g + c \beta \sin \alpha}{g} \right]$$

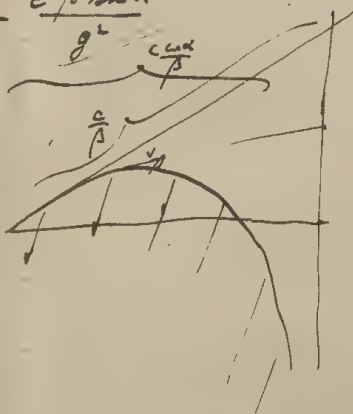
$$= \frac{1}{\beta} \ln \left[1 + \frac{c \beta \sin \alpha}{g} \right]$$

also multiply β :

$$T = \frac{1}{\beta} \left[\frac{c \beta \sin \alpha}{g} + \frac{c^2 \beta^2 \sin^2 \alpha}{g^2} \right] = \frac{c \sin \alpha}{g} + \frac{c^2 \beta \sin^2 \alpha}{g^2}$$

$$y = -\frac{1}{\beta} g t + \left[c \sin \alpha + \frac{g}{\beta} \right] \frac{x}{c \cos \alpha}$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-g - \beta \frac{dy}{dt}}{\beta \frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{c \sin \alpha}{\beta} + \frac{g}{\beta^2} \right)}{\frac{c \cos \alpha}{\beta}} = \tan \theta$$



$$d(v \cos \theta) = -F(v) \cos \theta dt$$

$$d(\sin \theta) = -g dt - F(v) \sin \theta dt$$

$$g d(\cos \theta) = v F(v) d\theta$$

$$g dt = -\frac{v}{\cos \theta} d\theta$$



$$\frac{v}{c} = g \cos \theta$$

$$u = v \cos \theta$$

$$\rho = -v \frac{dt}{d\theta}$$

$$\frac{du}{dt} = -k v^2 \cos \theta$$

$$\frac{du}{dt} = -k v^2 \cos \theta$$

$$\frac{1}{v} \frac{du}{d\theta} = -\frac{k}{g} v \cos \theta$$

$$-v \frac{d\theta}{dt} = g \cos \theta$$

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{u}{g \cos^2 \theta}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{k u^2}{\cos^2 \theta}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{k}{g} \left(\frac{u}{\cos \theta} \right)^3 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} = -\frac{2k}{g} \int \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}$$

$$\theta = \psi \quad \frac{d\psi}{\cos \psi} = d\psi$$

$$\int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = \int \frac{1}{\cos^3 \psi} d\psi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos \psi} + \frac{1}{\cos^3 \psi} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\cos \psi}$$

$$dt = -\frac{u}{g \cos^2 \theta} d\theta = -\frac{1}{g} \int \frac{u}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$x = \int u dt = -\frac{1}{g} \int \frac{u^2}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$y = -\frac{1}{g} \int \frac{u^2}{\cos^2 \theta} d\theta =$$

1. Počítajte hmotnosť trupu (výška 2 m, hmotnosť 100 kg) a rýchlosť, aby na výškových stĺpoch



$$2 M g (1 - \cos \varphi) = M \frac{v^2}{2}$$

$$2 \frac{v^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sqrt{\frac{1}{lg}}$$

$$\text{hore } v = 1 \frac{m}{s} = 100$$

$$l = 100$$

$$2 \frac{v^2}{2} = \frac{100}{2} \frac{1}{\sqrt{105}} = \frac{1}{2 \sqrt{10}} = \frac{1}{6}$$

je to skutočné?

2. Looping the loop, rýchlosť pred koncom pletky:
aby mi nepadla?



3. by rany na reže v narovnaní

4. Pas pletky na stole



5. Rýchlosť po jízde rovnomernou

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{F_g}{F_n} = m g \sin \alpha - m g \cos \alpha + \frac{2 m}{m g} \neq \varepsilon$$

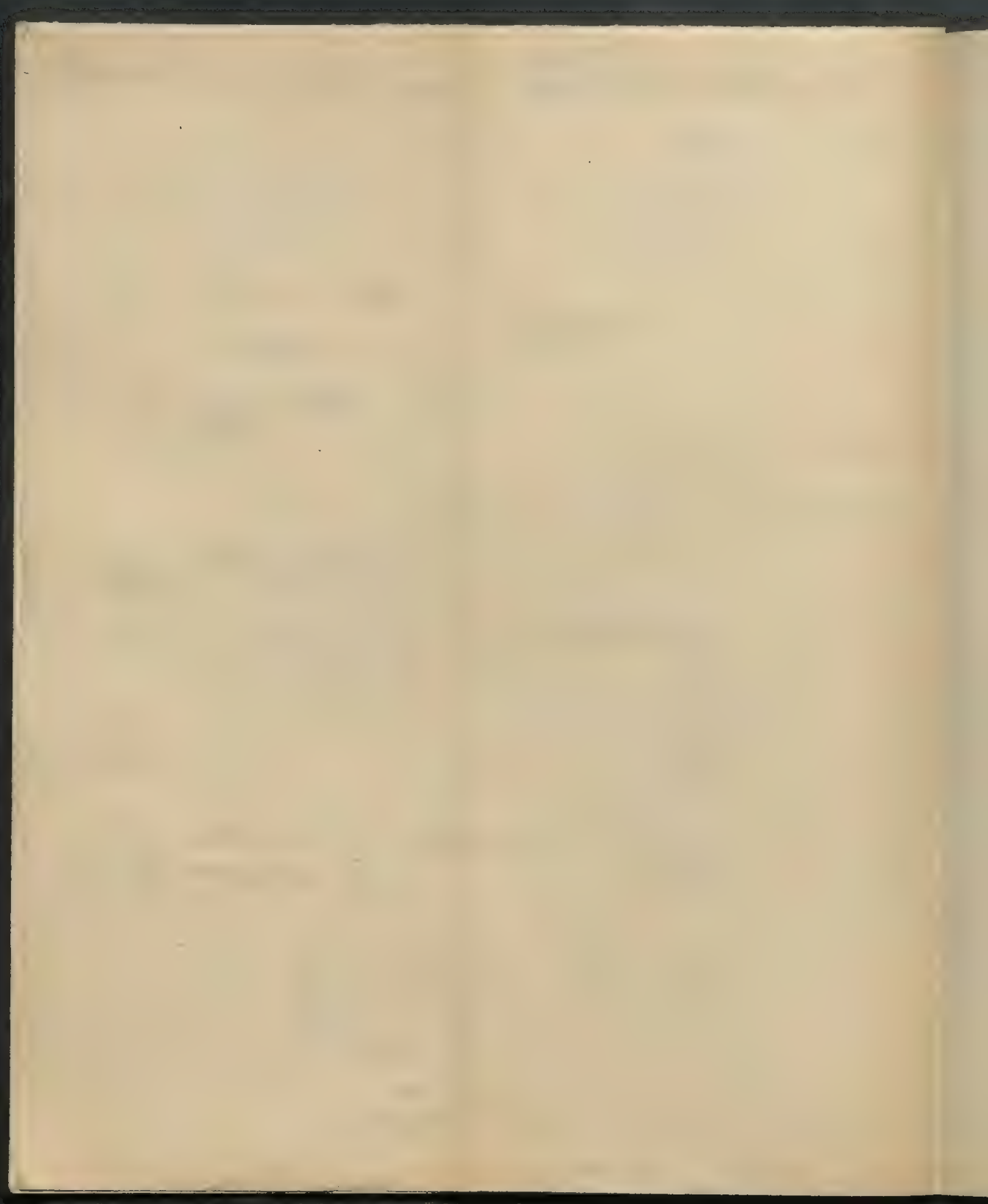


$$m g \cos \alpha = F_n$$

$$F_g = m g \sin \alpha - m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = m g \sin \alpha + F_g - \varepsilon$$

$$(m + m) \frac{d^2 s}{dt^2} = (m + m) g \sin \alpha - \varepsilon$$



$$P_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{n!} \left[\cos^n \varphi - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-2} \varphi + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-4} \varphi + \cdots \right]$$

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = \cos \varphi$$

$$P_2 = \frac{3}{2} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}$$

$$P_3 = \frac{5}{2} \cos^3 \varphi - \frac{3}{2} \cos \varphi$$

$$T = 2a \sqrt{\frac{K}{H_f l}}$$

$$K = K_0 + M l^2$$



$$= 2a \sqrt{\frac{\lambda}{f}}$$

$$\lambda = \frac{K}{M l}$$

$$\lambda = \frac{K_0}{M l} + l$$

$$T = 2a \sqrt{\frac{K_0 + M(l-l)^2}{H_f(l-l)}} = 2a \sqrt{\frac{K_0(1 + \frac{K}{K_0})}{H_f(l-l)}}$$

$$T' = 2a \sqrt{\frac{K_0}{H_f(l-l)}} + \frac{l-l}{f} = 2a \sqrt{\frac{K_0}{H_f l}}$$

$$\lambda - l = \frac{K_0}{M l}$$

$$T' = 2a \sqrt{\frac{K_0}{H_f(\lambda - l)}} + \frac{\lambda - l}{f}$$

$$= 2a \sqrt{\frac{K_0}{H_f l}} + \dots$$

$$\text{Min } T : l = \sqrt{\frac{K}{H_f}}$$

Köringdunye körüli mérték

Skénium amplitude

Huygens egyenletéből 1657 *de la Hire* 1669
 egyenletéből 1643

Newton megfigyelése a g -ról 1686

Newton
 körkörös átlóság egyenletéből *Newton* 1747 $1 + \frac{p_2}{10}$

Newton körkörös : 1792
Comini

Newton 1826

Raport

Recher 1672 w Kopf winter dypisi wch uk.

Cayenne - Paris $1\frac{1}{4}$ lines =

u Parizi pamtiniji o[↑]

uzg. p. v. skm. v. Terysi. $\frac{1}{400}$

36' 8 1/2" . $\begin{array}{r} 3612 \\ 72 \\ \hline 432 \\ 8 \end{array}$

$$\frac{1.25}{440.5} \neq \frac{1}{480}$$

Newton ¹⁶⁷⁸ frax. 4- pice. dur., ligna terna, splausum, reliqua f. et nervosa: prop.

Douglas Parklyne

$$\frac{4\pi}{3} \kappa_0 a = 2$$

Avoy Stornick:
6.5

~~$$\frac{dg}{dr} = \kappa \frac{20}{3} \pi \rho \left(1 - \frac{2}{5} \frac{p_0}{\rho}\right) = \frac{5g}{a} \left(1 - \frac{2}{5} \frac{p_0}{\rho}\right)$$~~

$$= \frac{\rho}{3} \pi r_0^3 \kappa \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{2g}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

$$f = f_0 \left[1 - \frac{2f}{a} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{f}{f_0} \right) \right]$$

von
Bouguer (1749)
wären teilweise die reduzier-
ten Werte

Carandish cyrenensis 1798

drut dtyfi 1m
i ranniz 1m



$$\cancel{2k} \frac{mMa}{d^2} = \mu \theta$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$K = \frac{4\pi^2 K \theta}{T^2} \cdot \frac{d^2}{2Hma}$$

$$2 \log p_0 = \frac{2}{5 \pi \kappa_0}$$

Wężyżenie ~~nie~~ ^zniebieskie telefony
przy rozdaniu

Cassiopeia - D = 5.448  1799  548

Rechts: Darty Cuma & Paille

Days $m(A_2)$ 20 inch 5 mm

M (Pg)

6. 45 40 cm

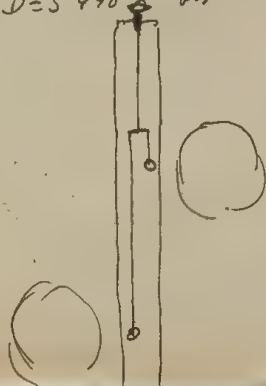
1'3 - 48.

7.407 kg

2'3
cm

under water

7855



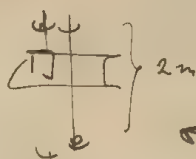
$$\Delta = 5.5270$$

$$K = 6.6576 \cdot 10^{-8}$$

Prism 1886 $\Delta = 552725$

Wahlg 1886 5578

Waga & Jolly



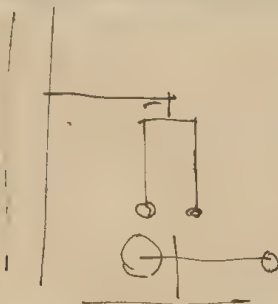
ca 1/2 1.36 m

$$\frac{da}{dt} = \frac{1.245}{0.121}$$

1898

42 Jahre 5 Jahre nach

$$\Delta = 5505$$

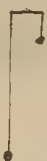
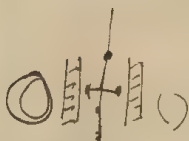


induktionssysteme 10^{-8} cindem permuting
dithone

$$\Delta = 54934$$

Wpke 1886?

Austin & Thudug 1897



Wpke $\frac{1}{500}$

Pogratyng & Gray mit wa wüney vbluchsch kryptete krom

Wpke pous's chm'engh Landel's 2 mit wa dntöngelgh

Gravir vordwör prava graviti at 1 =

tion, doch tritt jedenfalls bei der chemischen Kinetik ein hier nicht berücksichtigter Faktor wesentlich bestimmend hinzu.

Damit hängt wohl auch ein charakteristisches Unterscheidungsmerkmal zusammen, daß nämlich chemische Reaktionen von den Gesetzen der Wertigkeit beherrscht werden, während bei Koagulation eine unbegrenzte Agglomeration stattfindet. Letztere läßt sich, wie wir sahen, durch kugelige Anziehungsbereiche erklären, während bei seiner Theorie des Dissoziationsgleichgewichts sich schon Boltzmann seiner Zeit genügt sah, die Möglichkeit sphärischer Wirkungsgebiete zu verlassen und die Existenz gewisser „empfindlicher Bezirke“ auf der Oberfläche der Atome anzunehmen, da sonst die Tatsache unerklärlich wäre, daß z. B. O_2 , H_2 , N_2 Moleküle als Doppelatome bestehen, ohne daß dreifache, vierfache Atome auftreten).

6. Verallgemeinerung für langsame Koagulation, Ähnlichkeitsgesetze.

Schließlich möchte ich noch kurz bemerken, daß unsere Theorie geeignet erscheint, auch die Erscheinungen der „langsamen“ Koagulation, welche bei sehr geringem Elektrolytzusatz eintreten, wenigstens in formaler Hinsicht zu umfassen. Es genügt zu diesem Zwecke die von vornherein plausible Annahme einzuführen, daß in diesem Falle — d. h. bei unvollständiger elektrischer Teilchenentladung — nur ein gewisser Bruchteil e der Zusammenstöße verschiedener Teilchen zur Verflüssigung beiträgt.

des Wirkungskoeffizienten¹⁾ ϵ von der Art und Konzentration des Elektrolyten zu geben.

7. Theorie der Versuche Paines.

Bei Paines Versuchen läßt sich die mathematische Analyse noch weiter treiben, und die Sache scheint mir so interessant, daß ich sie noch kurz darstellen möchte. Paine bestimmte nämlich die Menge des koagulierten Niederschlages, welcher sich aus seinen Lösungen nach gewisser Zeitdauer der Elektrolysewirkung absetzte, sobald die Lösung erhitzt oder aber eine Zeitlang umgerührt wurde. Die Wirkung der Erhitzung mag auf einem uns nicht bekannten Temperatureinfluß beruhen, aber die Wirkung des Umrührens läßt sich leicht begreifen.

Denken wir uns nämlich die Flüssigkeit in scherende, lamellare Bewegung versetzt, so müssen die Teilchen, auch falls sie gar keine

1000

Next to the

gate

2
 Albo odwrócić: $l' = l \left[1 + \frac{Pl}{Eg} \right]$

|| Zapisz tak:
 $l' = l + \frac{Pl}{Eg} = l + \frac{Pl(0)}{Eg} + \frac{Pl'(0)}{Eg} + \dots$

jeżeli hydrostatyczny nacisk wywarłby ruch
 tego przedmiotu w kierunku przeciwnym do kierunku działania siły

$\frac{P}{g} =$ siła przysiadająca co na 1 cm^2 jako $= p$

(to mamy:

$$p = \frac{l' - l}{l} E \quad l' = l \left[1 + \frac{pl}{E} \right]$$

Wiesz to zrobiliśmy z uśrednieniem
 o grubości drutu (przysiadkowej)

- Aby wyrazić siłę jako funkcję stanu drutu wzdłuż odcinka



przedstawienie lawath $l' = x' - x$:

$$\frac{l' - l}{l} = \frac{u' - u}{x' - x}$$

a jeżeli $x' = x + \Delta x$

$$\text{to } \frac{l' - l}{l} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$l' = \dots + x' + u' - (x + u)$$

$$u' = u + \Delta u = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \dots$$

$$E \Delta l = 20000 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \cdot 7000 \cdot 1800$$

$$p = E \frac{du}{dx}$$

Naturalnie że siła p musi być oznaczona przez stan drutu w danym punkcie
 drutu, przez stan stężenia kątowego

Jeżeli wyrażamy to w ten sposób to mamy tę funkcję z minusem są
 wzorem takim więc jeżeli p i nie są jednostajnie rozmieszczone

(Tutaj $\frac{du}{dx} = \text{stałe}$, bo $u = \dots \frac{l' - l}{l} = \frac{pl}{E} = \frac{p}{E} x$
 więc $\frac{du}{dx} = \frac{p}{E}$)

Ale u.p. zależy nato że chcemy wyrazić taką siłę p , żeby było
 $u = \sin x$ to p musi być dwukrotnie p w przekroju

$$p = E \omega x$$

Albo odwrotnie dane p jako funkcja x , jeżeli będzie przedłużenie u z
N.p. uziar drutu:

$$\cancel{p = p_0 + kx} \quad p = p_0 + kx = E \frac{du}{dx}$$

$$p_0 x + k \frac{x^2}{2} = E u \quad \text{+ const.} \Rightarrow \text{jeżeli w punkcie } \begin{cases} x=0 \\ u=0 \end{cases}$$

Wz - n.p. całkowite przedłużenie końca drutu o długości l :

$$l' - l = u_{x=l} = \frac{1}{E} \left[p_0 l + k \frac{l^2}{2} \right] = \frac{l}{E} \left[p_0 + \frac{k l}{2} \right] \quad \text{wz. taki}$$

jeżeli tylko drut nie miał wzmocnienia bez względu na to, czy było porównanie o pewnym
coś było wzmocnieniem.

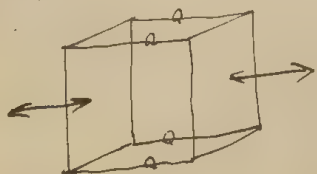
Jeżeli przedłużenie stosownie nastąpi zmianie trwały odkształcenie wzmocnienia
to zamiast $p_0 + kx$ będzie trzeba wziąć $p_0 + k(x-u)$ t.j. do tego można
zawrócić).

Jeżeli się przy tym wszystkich robi dokładne pomiary to widać, że grubość
drutu zmniejsza się podczas przedłużenia o pewnym stosunku.

Tak że jeżeli δ = grubość normalna a δ' podczas przedłużenia, to

$$\frac{\delta' - \delta}{\delta} = -\mu \frac{l' - l}{l} \quad \mu = 0.2 - 0.5$$

To samo zjawisko we formie matematycznej: jeżeli wytniemy sobie kółko
o długości boków 1 cm



Przypuszczając siły p do przeciwnych podstaw
nastąpi przedłużenie boków $a: a_0 = \frac{p}{E}$

a ~~przedłużenie~~ skrócenie boków b i c: $0: \mu \frac{p}{E}$

a przyspieszenie wzniesienie zamiast sił ciężkich (odwrócić
tak samo)

Jaka zmiana objętości wskutek tego?

$$(1 + \Delta u)(1 - \Delta v)(1 - \Delta w) = 1 + \Delta u - \Delta v - \Delta w$$

$$= 1 + \Delta u - 2\mu \Delta u = 1 + (1 - 2\mu) \Delta u \quad \text{Wzr. zmiana objętości} = (1 - 2\mu) \Delta u$$

~~Jeżeli~~ μ zawsze jest mniejsze od $\frac{1}{2}$; ~~zatem~~ jeżeli $\mu = 0.5$ (Kantostatek, izotyczne) zmiana objętości = 0, jeżeli mniejsze to następuje zwiększenie.

Jeżeli teraz równie ciekawym ^{przejściem} do wyznaczenia, jaka zmiana będzie i objętości?

$$\text{błędnie } 1 - \frac{K}{E} + 2\mu \frac{K}{E} = 1 + (2\mu - 1) \frac{K}{E}$$

Superpozycja
przechodzący ją w inną

a zmiana objętości: $\left[1 + (2\mu - 1) \frac{K}{E}\right]^3$, wzr. zmiana objętości $1 + 3(2\mu - 1) \frac{K}{E}$

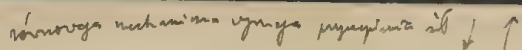
to wyrażenie odpowiada różnicy przy drucku: $-\frac{3(2\mu - 1)}{E} = \beta$

~~zatem~~ można się więc wyobrazić jeżeli się zna E i μ

spółczynnik $\frac{E}{3(2\mu - 1)} = \frac{1}{3} \frac{K}{2\mu - 1}$ tej zmian...

znając się razem także obliczyć znakom = współczynnik sprężystości odpowiadający ciśnieniu (Volumenmodul) w kółkach hydrostat. mówią "sprężystości objętościowej". Wzr. można i obliczyć umożliwiając μ między E i K [to statycznie albo przedmiotem Ostada albo za pomocą wzajemia].

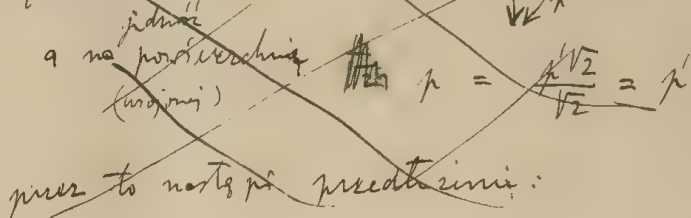
Jeszcze bardzo ważny sposób obliczania: ponieważ ^{nie} za pomocą ciekawych K przechodzący do postaci $\frac{K}{E}$ i μ i na to (skracanie)



5
2.8

Wtedy ρ potężny aby stworzyć zmianę o kąt $\varphi = 1$ narysowany T
= ~~nierównomierny~~ ^{potężni} ~~przez siebie~~ ^{potaci} Można go jednak wyrazić za pomocą

~~sporodoceni per novit ty samy vallois p
 Diata site p
 iduie~~



~~pass to north pt preceding:~~

Faktorem, ~~wpływającym~~ jest $p_1, p_2 = p \sqrt{2}$, a ~~zatem~~ ~~co~~ ~~dotyczy~~ $p' = p \sqrt{2}$ powieci ~~dotyczy~~ o tym strumieniu $\sqrt{2}$ więcej. Wzrost powstaje także same ciśnienie, a kształt o ten sam sposób się zmienia. Następnie wpr. zmniejszenia jednej przekątnej o $\epsilon = (1+\mu) \frac{p}{E}$, a ~~zmniejszenie~~ ^{wzrost} ~~strumienia~~ ^{strumienia} drugiej.

$$f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1+2}{1+2}$$

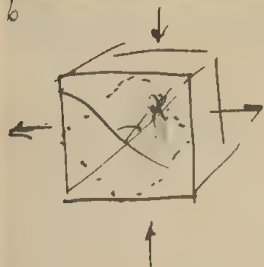
$$= \frac{\cancel{y_1}^2 \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)}{\cancel{y_1}^2} = \frac{y_1 \frac{\pi}{4} + y_1 \frac{\pi}{2}}{1 - y_1 \frac{\pi}{4} y_1 \frac{\pi}{2}} = \frac{1 + y_1 \frac{\pi}{2}}{1 - y_1 \frac{\pi}{2}}$$

$$t_g \frac{p}{2} = z$$

$$\varphi = 2\varepsilon$$

$$\frac{\mu}{T} = T = \frac{\mu}{2(1+\mu) \frac{\mu}{E}} = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

6



Foktysm

$$\frac{E}{\alpha} = T$$

dyktik nie zmienia się bo

$$(1+\mu-\mu)(1-\mu)(1+\mu) = 1$$

Jżeli



postawę zmienia się jako stała to



musimy również wiedzieć

driz villon
wzr ~~zależy~~ E, K, T, μ można ~~stwierdzić~~ wyrazić 2 dowolnymi.

E, T zależy do materiału, więc wystarczy K obliczyć się; bez
względności: 2 z tych. K, T jako fundamentalne, E z nich.

$$K = \frac{E}{3(1+2\mu)}$$

$$T = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$E = 3(1-2\mu)K$$

$$T = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)}K$$

Jżeli dobrać współczynniki ^{proporcjonalne}

to wyrażenie:

$$\epsilon = \frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{(\sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$\eta = \frac{\sigma_y + \mu(\sigma_x + \sigma_z)}{E}$$

$$\zeta = \frac{\sigma_z + \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}$$

$$\sigma_x = \frac{2(1+\mu)}{E} \sigma_y$$

$$\sigma_y = \frac{2(1+\mu)}{E} \sigma_z$$

$$\sigma_z = \frac{2(1+\mu)}{E} \sigma_x$$

albo całkowite :

$$u = a + a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

$$v = b + b_1 x + b_2 y + b_3 z$$

$$c = c + c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

w ten sposób - pozostałe współrzędne v
odpowiadające punktowi minima $a, b, c = 0$ oraz
zatem pozostałe 9 ~~tych~~ dowolnych
wielkości.

Jakbyśmy mieli opisać taki obiekt

podlegający wieli jednorodnie przesłanemu w 3 kierunkach dowolnych = 6 wielkości
dowolnych, a opisać tego typu 3 obrotu wyc. 9 wielkości, faktycznie tych dowolnych
wielkości.

Wyc. współrzędne po obrotach x', y', z' :

$$x' = x + a_1 x + a_2 y + a_3 z = (1 + a_1) x + a_2 y + a_3 z$$

$$y' = \quad \quad \quad = b_1 x + (1 + b_2) y + b_3 z$$

$$z' = \quad \quad \quad = c_1 x + c_2 y + (1 + c_3) z$$

Wyc. wyrażając znanego trójkąta geometrycznego analitycznej : koida kugła
i koida powierzchnia stopnia n w przestrzeni kugła lub powierzchnię tego samego
stopnia (ale naturalnie o innych współrzędnych) minuse obrotów.

N. p. punkt punkt , przestrzenią przestrzenią

Ponieważ $A'x' + B'y' + C'z' + D = 0$ = równanie powierzchni. podobne.

wyc. w ten sposób także możemy $Ax + By + Cz + D = 0$ to.

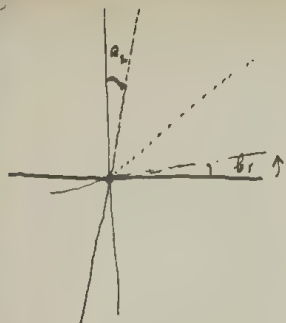
A koida zamieni się w dopódy

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \text{const.}$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \text{const.}$$



osi tej dopódy wyrażamy kierunkami przesłania , dopódy obrotów



skladove obraty

$$\frac{b_1 - a_1}{2} = \gamma$$

$$\frac{c_1 - b_1}{2} = \alpha$$

$$\frac{a_1 - c_1}{2} = \beta$$

skladove obraty

$$\frac{a_2 + b_1}{2} = \chi$$

20

$$\frac{b_2 + c_1}{2} = \varphi$$

$$\frac{c_1 + a_2}{2} = \psi$$

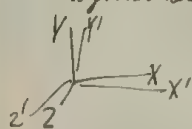
$$x' = x + a_1 x + \frac{a_2 - b_1}{2} y + \frac{a_2 - c_1}{2} z + \frac{a_2 + b_1}{2} y + \frac{a_2 + c_1}{2} z$$

$$= x + a_1 x - \gamma y + \beta z + \chi y + \varphi z$$

$$\chi_y = \chi_x = \frac{\chi}{T} = (a_2 + b_1) \frac{2(1+\gamma)}{E}$$

$$\chi_x = \dots$$

wynikami w kierunku $X'Z'$ oraz w kierunku Y' oraz w kierunku Z' oraz w kierunku X' oraz w kierunku Y' oraz w kierunku Z'



$$x_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

$$x_2 = x_1 (1+\lambda)$$

$$y_1 = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$$

$$y_2 = y_1 (1+\mu)$$

$$z_1 = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$$

$$z_2 = z_1 (1+\nu)$$

$$x_3 = \alpha x_2 + \alpha' y_2 + \alpha'' z_2 = \alpha (1+\lambda) x_1 + \alpha' (1+\mu) y_1 + \alpha'' (1+\nu) z_1$$

$$= x [\alpha^2 (1+\lambda) + \alpha'^2 (1+\mu) + \alpha''^2 (1+\nu)] + y [\alpha \beta (1+\lambda) + \alpha' \beta' (1+\mu) + \alpha'' \beta'' (1+\nu)] + z [\alpha \gamma (1+\lambda) + \alpha' \gamma' (1+\mu) + \alpha'' \gamma'' (1+\nu)]$$

$$x_3 = x [1 + \alpha^2 \lambda + \alpha'^2 \mu + \alpha''^2 \nu] + y [\alpha \beta \lambda + \alpha' \beta' \mu + \alpha'' \beta'' \nu] + z [\alpha \gamma \lambda + \alpha' \gamma' \mu + \alpha'' \gamma'' \nu]$$

$$y_3 = x [\beta \alpha \lambda + \beta' \alpha' \mu + \beta'' \alpha'' \nu] + y [1 + \beta^2 \lambda + \beta'^2 \mu + \beta''^2 \nu] + z [\beta \gamma \lambda + \beta' \gamma' \mu + \beta'' \gamma'' \nu]$$

$$z_3 = x [\gamma \alpha \lambda + \gamma' \alpha' \mu + \gamma'' \alpha'' \nu] + y [\gamma \beta \lambda + \gamma' \beta' \mu + \gamma'' \beta'' \nu] + z [1 + \gamma^2 \lambda + \gamma'^2 \mu + \gamma''^2 \nu]$$

$$x_3 = x (1+a_1) + \gamma z + \chi y$$

$$y_3 = y (1+b_1) + \chi z + \varphi x$$

$$z_3 = z (1+c_1) + \varphi y + \psi x$$

$$\xi = \frac{X_2 + \mu(Z_2 + V_2)}{E}$$

$$\eta = \frac{V_2 - \mu(X_2 + Z_2)}{E}$$

$$\zeta = \frac{Z_2 - \mu(X_2 + V_2)}{E}$$

$$\xi E = X_2 + \mu(Z_2 + V_2)$$

$$\eta E = V_2 - \mu(X_2 + Z_2)$$

$$\zeta E = Z_2 - \mu(X_2 + V_2)$$

$$E(\eta + \mu \xi) = X_2(\mu + \mu^2) + V_2(1 - \mu^2)$$

$$E(\xi + \mu \eta) = X_2(1 - \mu^2) - V_2(\mu + \mu^2)$$

$$X_2 \left[(1 - \mu^2)^2 - (\mu + \mu^2)^2 \right] = E \left\{ (1 - \mu^2) + \eta(\mu + \mu^2) + \xi\mu(1 + \mu) \right\}$$

$$1 - 2\mu^2 + \mu^4 - \mu^2 - 2\mu^3 + 2\mu^3 = \xi(1 - \mu^2)E + \eta\mu E(1 + \mu) +$$

$$= 1 - 3\mu^2 + 2\mu^3 \quad (1 + \mu)^2 [(1 - \mu)^2 - \mu^2] = (1 + \mu)^2 (1 - 2\mu)$$

$$= (1 + \mu)^2 (1 - 2\mu)$$

$$X_2 = \xi \frac{(1 - \mu)E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} + \frac{(\eta + \xi)\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}$$

$$\begin{matrix} 1 & \mu & \mu^2 \\ \mu & 1 & \mu \\ \mu^2 & \mu & 1 \end{matrix} \begin{vmatrix} \xi E & \mu & \mu^2 \\ \eta E & 1 & \mu \\ \zeta E & \mu & 1 \end{vmatrix}$$

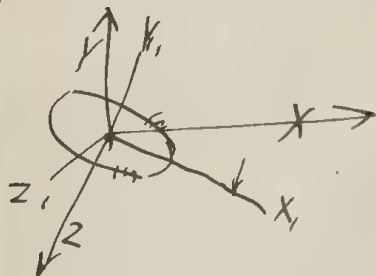
$$= (\xi + \eta + \zeta) \frac{\mu E}{1 + \mu(1 - 2\mu)} + \xi \frac{E}{1 + \mu}$$

$$= \Delta + 2T\xi$$

oznacza one oryginalne punkty i których wydzielenie jest najłatwiejsze.
Musimy jeszcze dodać iż dependsja takiej struktury innowacjom trwa
wydzieleniem i 3 drzewem, przy czym i wielkość tych strężeń.

Wydzielenia nie będą naszymi punktami X, Y, Z lecz dowodem

Jeżymy na to iż strężeń i ich punkty ułożymy w układ współrzędnych x, y, z .



$$\cos \angle X_1 = \alpha \quad \cos \angle Y_1 = \beta$$

$$\cos \angle X_1 = \alpha'$$

stąd przekształćmy współrzędne z

$$X, Y, Z \text{ na } X_1, Y_1, Z_1$$

$$x = x_1 \cos \alpha_1 \quad x = y_1 \cos \alpha_2$$

$$\text{Lgty } \cos \alpha_1 = u_1$$

$$\cos \alpha_2 = u_2$$

$$\cos \alpha_3 = u_3$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z \\ y_1 = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ z_1 = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \end{cases}$$

W tych punktach następuje wydzielenie więc może spotykać się w wydzieleniu:

$$x_2 = x_1 + u_1 = x_1(1 + \lambda)$$

jeżeli wydzielenie $u_1 = \lambda x_1$

$$y_2 = y_1(1 + \mu)$$

$$z_2 = z_1(1 + \nu)$$

Teraz możemy napisać w dalszym układzie

$$x_3 = \alpha x_2 + \alpha' y_2 + \alpha'' z_2$$

$$y_3 = \beta x_2 + \beta' y_2 + \beta'' z_2$$

$$z_3 = \gamma x_2 + \gamma' y_2 + \gamma'' z_2$$

¹² tunc primo obitio nichilominus macti ~~et~~ $\alpha \beta \gamma$

$$x_4 = x_3 - \gamma y_3 + \beta z_3$$

~~hinc~~

$$y_4 = y_3 + \alpha z_3 + \gamma x_3$$

$$z_4 = z_3 - \beta x_3 + \gamma y_3$$

Tunc hypothese expressio ad hunc usque vellemus jam $\lambda \gamma$ etc.

$$x_4 = ~~u x_1 + v y_1 + w z_1~~$$

$$= u x_1 (1 + \lambda) + u' y_1 (1 + \mu) + u'' z_1 (1 + \nu) - \gamma (v x_1 + v' y_1 + v'' z_1) + \beta (u x_1 + u' y_1 + u'' z_1)$$

$$= x_1 (u + u\lambda - \gamma v + \beta u) + y_1 (u' + u'\mu - \gamma v' + \beta u') + z_1 (u'' + u''\nu - \gamma v'' + \beta u'')$$

\downarrow
 $u x + v y + w z$

$$= x [u^2 + u^2\lambda - uv\gamma + uw\beta + u'^2 + u'^2\mu - u'v'\gamma + u'v'\beta + u''^2 + u''^2\nu - u''v''\gamma + u''v''\beta] +$$

$$+ \dots \left[\begin{array}{l} u v + u' v' + u'' v'' = 0 \\ \text{etc.} \end{array} \right]$$

$$x_4 = (1 + \lambda u^2 + \mu u'^2 + \nu u''^2) x + (\lambda u v + \mu u' v' + \nu u'' v'' - \gamma) y + (\lambda u w + \mu u' w' + \nu u'' w'' + \beta) z$$

$$y_4 = (\lambda v u + \mu v' u' + \nu v'' u'' + \gamma) x + (1 + \lambda v^2 + \mu v'^2 + \nu v''^2) y + (\lambda v w + \mu v' w' + \nu v'' w'' - \alpha) z$$

$$z_4 = (\lambda w u + \mu w' u' + \nu w'' u'' - \beta) x + (\lambda w v + \mu w' v' + \nu w'' v'' + \alpha) y + (1 + \lambda w^2 + \mu w'^2 + \nu w''^2) z$$

Ponieważ współczynniki drzewca mogą być dowolne, możemy wybrać dowolne ~~określenie~~ ^{określenie} w ten sposób wybierz:

$$a_1 = \lambda u^2 + \mu u'^2 + v u''^2$$

$$b_2 = \lambda v^2 + \mu v'^2 + v v''^2$$

$$c_3 = \lambda w^2 + \mu w'^2 + v w''^2$$

$$a_1 + b_2 + c_3 = \lambda + \mu + v$$

$$a_2 = \lambda u v + \mu u' v' + v u'' v'' - \mu$$

$$a_3 = \lambda u w + \mu u' w' + v u'' w'' + \mu$$

$$a_4 = \lambda v w + \mu v' w' + v v'' w'' + \mu$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$a_2 - b_1 = 2\mu$$

$$b_3 - c_2 = 2\mu$$

$$c_4 - a_3 = 2\mu$$

Co następuje z faktu takiego wyboru jednorodnego względem elementów obrotu?

$$x' = (1 + a_1)x + a_2 y + a_3 z$$

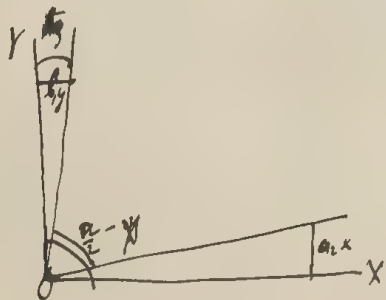
$$y' = a_4 x + (1 + b_2)y + b_3 z$$

$$z' = c_3 x + c_4 y + (1 + c_3)z$$

Jak przemierzają się punkty leżące na ośiach $X Y Z$?

I.). Przesłanie punktu w kominkach $X Y Z$ w strzałkach $(1+a_1)$
 $(1+b_2)$
 $(1+c_3)$

II.). Twierdzenie Luthi



$$\sin(\frac{\pi}{2} - \phi) = \sin \phi = \phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$\sin \phi_1 = b_1, \quad \sin \phi_2 = a_2$$

$$\phi = b_1 + a_2$$

$$\text{Stąd: } \phi = c_2 + b_3$$

$$\phi = a_3 + c_4$$

Do tego samego rezultatu takie 2 typy ie moine napisac wulgi typ co wyzej.

$$\begin{aligned} x' &= x + a_1 x + \beta_2 - \gamma y + \frac{c_1 + a_3}{2} z + \frac{a_2 + b_1}{2} y & x &= \frac{a_2 + b_1}{2} + \frac{a_2 + b_1}{2} \\ y' &= y + \beta_2 y + \gamma x - \alpha z + \frac{a_2 + b_1}{2} x + \frac{b_3 + c_2}{2} z & & \\ z' &= z + c_3 z + \alpha y - \beta x + \frac{b_3 + c_2}{2} y + \frac{c_1 + a_3}{2} x & & \end{aligned}$$

wiec skonstruowac nowe (predkierunki i trzeci kolumnach dowodzonych)

moine zastapić: trzeci predkierunkami i drugi trzeci skonstruowac i trzeci

skonstruowac (ypresumizacji stygnami warstwy wnowydz)

Ten jest jakby...

Wzrosty prototypu:

$$X_1 = \frac{1}{E} [X_1 - \mu (V_1 + Z_2)]$$

$$X_1 = (V_1) = \frac{2(n+1)}{E} (a_2 + b_1)$$

$$X_2 = \frac{1}{E} [b_2 - \mu (a_3 + b_2)]$$

$$Y_2 = (Z_2) = \frac{2(n+1)}{E} (b_3 + c_2)$$

$$X_3 = \frac{1}{E} [c_3 - \mu (a_1 + b_1)]$$

$$Z_3 = (X_2) = \frac{2(n+1)}{E} (c_3 + a_3)$$

Ten system równowagi system

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{E} [P_1 - \mu (P_2 + P_3)] \\ P_1 &= \frac{1}{E} [P_1 - \mu (P_2 + P_3)] \\ P_2 &= \frac{1}{E} [P_2 - \mu (P_1 + P_3)] \\ P_3 &= \frac{1}{E} [P_3 - \mu (P_1 + P_2)] \end{aligned}$$

o kolumnach trzeci skonstruowac dowod

(toż samo jak moglo by

zastapić wty stygnami skonstruowac

nowe normalne i kolumnach

przekazywanych)

Który system się wygrywa to zależy od kolumnach skonstruowac system

konieczni skonstruowac

A momenty: jest nie ~~indefinitywny~~ ^{indefinitywny} ~~momenty~~ ^{momenty} ~~zbieżny~~

$$-(X'_y + \cancel{X'_y}) dz dx dy + (Y'_x + \cancel{Y'_x}) dy dz dx = 0$$

$$X_y = Y_x$$

$$Y_z = Z_y$$

wsp. stałe i równość:

sta

Elipsoide i równość

$$X_0 = X_x \cos \alpha + X_y \cos \beta + X_z \cos \gamma = R \cos \alpha$$

3 kierunki o kątach $\perp = 0, 1, 2$

$$Y_0 = X_y \cos \alpha + Y_y \cos \beta + Y_z \cos \gamma = R \cos \beta$$

$$Z_0 = X_z \cos \alpha + Y_z \cos \beta + Z_z \cos \gamma = R \cos \gamma$$

Wyznaczanie parametrów:

$$\text{At } \xi = f(x, y, z)$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\text{Ciekawe } \begin{cases} x + \xi \\ y + \eta \\ z + \zeta \end{cases}$$

$$\text{Długość } \begin{cases} x + \Delta x + \xi + \Delta \xi = x + \xi + \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \Delta x \\ y + \Delta y + \eta + \Delta \eta = y + \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta x \\ z + \Delta z + \zeta + \Delta \zeta = z + \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Delta x \end{cases}$$

$$\sigma_3 \begin{cases} x + \xi + \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \Delta z \\ y + \eta + \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \Delta y + \frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \eta}{\partial z} \Delta z \\ z + \zeta + \dots \end{cases}$$

$$W_{\text{sp}} = \left(P_3 - 0' \right) \text{ jednorodnie oddzielone } a_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad a_2 = \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad a_3 = \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{E} [X_x - \mu (Y_y + Z_z)] \quad ; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{E} [Y_y - \mu (X_x + Z_z)] \quad , \quad \dots$$

$$\lambda = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{E} X_y \quad \text{etc.}$$

Zastosowania

ciężkość H_2O 0.00005
 lin 0.00015

34

I). Do elementu dyfuzyjnego, otrzymujemy dany na wyłożeniu

Pb 0.00003
 Cu 0.00001
 Hg 0.000004

II). Określenie tego jest w rzeczywistości geometrycznie podobne

$$\begin{aligned} x' &= (1+k)x & \xi &= kx & \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial z} &= k & \bar{E} &= \frac{(1-2\mu)k}{3} \\ y' &= (1+k)y & \eta &= ky & \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \dots = 0 & T &= \frac{(1-2\mu)k}{6(1+\mu)} \\ z' &= (1+k)z & \zeta &= kz \end{aligned}$$

$$X_y = Y_z = Z_x = 0$$

zmiana objętości prop. $(1+k)^3 - 1 = 3k$

$$X_x = Y_y = Z_z = \frac{E k}{1-2\mu} = p$$

$$\text{wzr} \quad \frac{\frac{3k}{1-2\mu} \frac{E k}{1-2\mu}}{3k} = \frac{3E}{1-2\mu} = \underline{\underline{K}}$$

$$\text{Zatem } X_s = p \cos \alpha$$

$$Y_s = p \cos \eta \quad \text{tj. zatem}$$

zatem n.p. cięto dowolny kształt w pionowej płaszczyźnie będzie miał tę samą objętość. Tak samo jak płyty nie były puste.



Co się tam mieści jest więc równo ściśnięte i wyciągnięte; aby to ostatnie otrzymać trzeba i przyciągnąć.

Doświadczenie uprzedzone nie miało, więc trzeba wykonać

n.p. 2 EIT

Natomiast takimi w innych żyłach na ścianach zewnętrznych nie doświadczenia

Coś mi nie lubi ^{pręty} w Langa. ~~Głównie~~ Walec wydłużony podobnie.

III. Długość przekroju ^{przekroju} ~~ostrego~~ lub walec, do podziału wzdłuż p, zwrócić.

Symetria wskazuje że $X_y = Y_z = Z_x = 0$, a innymi równaniami zderzeń uzyskamy

stawiając $V_y = Z_2 = 0$ $X_x = \mu$ z czego



Wzrę szczególny przypadek obrotów jednowymiarowych

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\mu}{E} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\mu \frac{\mu}{E} = -\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

(znane prawo wężowości drutu itp.)

wzrę użycie dla dowolnego przekroju

Zmiana objętości $= \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = (1-2\mu) \frac{\mu}{E}$
Na ten polega jeden sposób mierzenia μ używamy przez Wertheima; razo uśrednia

Wzrę  mierzy się przedłużeniem $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ i obniżeniem poziomu wody z czego θ
 z tego $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 - 2\mu$ $\mu = \frac{1 - \theta(\frac{\partial \xi}{\partial x})}{2}$

Ogólny przypadek obrotów jednowymiarowych (względnie osiownia stała)

$X_x = \text{const}$ itp. wyeliminować stałe itp. a sily zewnętrzne $X_s = \dots$

IV. Skrot walec (Obrotów jednowymiarowych)

Stwierdzenie: nie ma przesunięć, tylko obrot przekroju prop. $y = cy$



$$\xi = cyz$$

$$\eta = -cyx$$

$$Wzrę $X_x = V_y = Z_2 = 0$$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = cz$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = cy$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = -cx$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -cy$$

$$\eta = 0$$

$$V_x = X_y = Tcz$$

$$X_y = Tcz$$

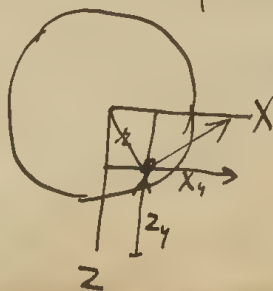
Wzrę w przekroju:

$$V_z = -Tcx = Z_y$$

$$Z_x = 0$$

Wypadkowe R przechodzi do promienia r i wielkości

$$Tcx$$



$T(\frac{K}{mm^2})$ Fe 7000 35
 Cu 4000
 Sn 1500
 miedź 2300
 Kautchuk 0.16

bo wreszcie wtedy $X = R \sin \varphi$:


$$V = R \sin \varphi$$

Wzrost w każdym punkcie koła moment $T c r^2$

całkowity moment = $2\pi \int_0^R \underbrace{dr}_{\text{długość}} \cdot \underbrace{T c r}_{\text{moment}} \cdot \underbrace{r}_{\text{ramię}} = \frac{\pi R^4}{2} T c$

c oznacza kąt skręcenia dla długości 1 wzdłuż
 jednostki podłogi (długości 1) skręca się o φ to $c = \frac{\varphi}{l}$

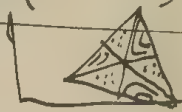
Moment = $\frac{\pi R^4}{2} T \frac{\varphi}{l}$

[Taki skręcenie drutu osiągnąć się może  $\Delta \varphi = \frac{\varphi}{l} T d\varphi$]

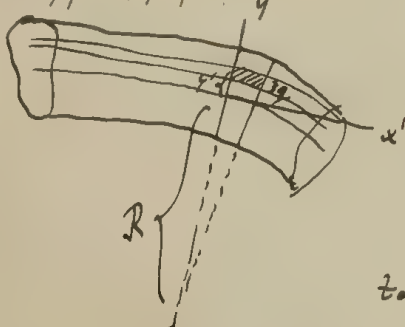
Tutaj gdzie φ_1
 $\varphi_1 = a z \quad \varphi_2 = a x$
 $\varphi = \varphi_1 \cos nx + \varphi_2 \cos n z$
 $= a (2 \cos nx - x \cos n z)$
 Jeśli przekrój = koło to
 $z = R \sin nx \quad x = R \cos nx$
 $\varphi_2 = 0$ na obwodzie
 Jednostka ≥ 0 jeśli przekrój równy

Właściwie prosty prętyczek tylko przy wale; inne granice zostały etc. wiele
 skomplikowane ponieważ przekrój nie prosty płaski. (St Venant)

Prętyczki granic zostały nieścisłe, przybliżone teoria



Prętyczki są w ten sposób że przekrój prostokątny w przekroju XY
 Przekrój prostokątny!



Ważna linia, oś, ~~z~~ nie znamy długości

Całkowity $X'_x = \frac{y'}{R E}$ Prętyczki wzdłuż y'

$$\frac{(R + y') dy - R dy}{R dy} = \frac{y'}{R}$$

zatem wzniesienie: $X'_x = \frac{y' E \varphi}{R}$

Jeśli wypadek $= 0$ to $\frac{1}{R} E \sum y' \varphi = 0$ to znaczy że oś musi przechodzić
 przez środek ciężkości przekroju

Moment postępsy:

$$M_z = \frac{E}{R} \int y^2 \rho = \frac{E}{R} \quad \text{gdzie } \ominus = \text{Moment bezwzględny wyznaczony}$$

musi równowagę momentów mieć, inaczej by powstał $(l-x)$ nie powstał w opóźnieniu

$$\frac{1}{R} = \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad R dy = dx$$

$$\frac{E}{R} \frac{d^2y}{dx^2} = P(l-x)$$

już nie jest przy końcu

W tym momencie $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

patrz Lowe p. 126
136

$$\text{Dlatego warunki } \left. \begin{array}{l} y=0 \\ \frac{dy}{dx}=0 \end{array} \right\} x=0$$

$$\frac{E}{R} y = P \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

Wzrost obciążenia końca wolnego $(x=l)$:

$$y = \frac{P}{EO} \frac{l^3}{3} = \frac{(Pl)}{EO} \frac{l^2}{3}$$

$$\text{Jżeli n.p. przekrój} = \frac{b}{c}$$



Oparcie przeciwnego

$$\ominus = \frac{cb^3}{12}$$

wzrost b wale wskazywać wpływ analityczny

$$= \frac{P}{12} \frac{b^2}{c}$$

wzrost przy równości, to jest mamy ten sam wzrost b

Względnie temu wzrostu mamy przeciwny przekrój końca   $\text{transvers silownych}$

z tego już

$$\frac{EO}{12} \left(\frac{b}{c} \right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\frac{EO}{12} \left(\frac{b}{c} \right)^2 = \frac{1}{16}$$



$$\frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^3$$

$$y = \frac{P}{EO} \frac{l^3}{3 \cdot 16}$$

Taki przekrój



$$R_1 = R_2$$

$$a_1 = \alpha^2 \lambda + \alpha'^2 \mu + \alpha''^2 \nu$$

$$b_1 = \beta^2 \lambda + \beta'^2 \mu + \beta''^2 \nu$$

$$c_1 = \gamma^2 \lambda + \gamma'^2 \mu + \gamma''^2 \nu$$

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$$

$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1$$

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$$

$$\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0$$

$$\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0$$

$$\varphi = \beta\gamma\lambda + \beta'\gamma'\mu + \beta''\gamma''\nu$$

$$\psi = \alpha\gamma\lambda + \alpha'\gamma'\mu + \alpha''\gamma''\nu$$

$$\chi = \alpha\beta\lambda + \alpha'\beta'\mu + \alpha''\beta''\nu$$

~~9. Roman~~

12 Roman do emanenta wilkoni $\lambda \mu \nu$

$\alpha \alpha' \alpha''$

$\beta \beta' \beta''$

$\gamma \gamma' \gamma''$

Dziś w 6 wilkoni dowiedzieli (to może za długo już --)

kierunki są -- 3

wilkoni wyjdą -- 3

$$\frac{p}{E\theta} \eta = -\frac{dy}{ds} \quad \parallel \quad \frac{\partial \eta}{\partial s} = \sin \gamma$$

$$\frac{p}{E\theta} \sin \gamma = -\frac{dy}{ds}$$

Subsidiary relations

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$x = x + \xi$$

x_0

$$\lambda \sqrt{\frac{D}{\rho}}$$

$$x + \Delta x$$

$$x + \Delta x + \xi + \Delta \xi = x + \xi + \left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}\right) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2$$

$$E \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega^2$$

$$E\xi = X_1 - \mu(Y_1 + Z_1)$$

$$E\eta = \mu X_1 + Y_1 - \mu Z_1$$

$$E\xi = \mu X_1 - \mu Y_1 + Z_1$$

$$X_1 = \frac{E \begin{vmatrix} \xi & \mu & -\mu \\ \eta & 1 & -\mu \\ \xi & \mu & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\mu & -\mu \\ \mu & 1 & \mu \\ -\mu & \mu & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu & -\mu \\ \mu & 1 & \mu \\ -\mu & \mu & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu & -\mu \\ \mu & 1 & \mu \\ -\mu & \mu & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu & -\mu \\ \mu & 1 & \mu \\ -\mu & \mu & 1 \end{vmatrix}$$

$$= E \frac{\xi(1-\mu^2) + \mu(\mu^2+1) + \xi(\mu^2+1)}{1-\mu^3-\mu^3-\mu^3}$$

$$= E \frac{\xi(1-\mu^2) + \mu(\mu^2+1) + \xi(\mu^2+1)}{1-\mu^3-\mu^3-\mu^3}$$

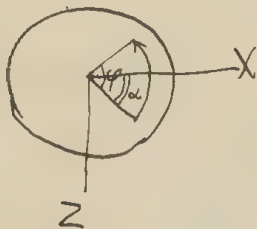
$$= E \frac{\xi(1-\mu^2) + \mu(\mu^2+1) + \xi(\mu^2+1)}{1-\mu^3-\mu^3-\mu^3} = (1+\mu)(1-\mu^2)$$

$$= E(\xi(1+\mu))$$

$$1+\mu-2\mu-2\mu^2$$

Skrajt valca skrajšiny?

Winnu z do' wa ducuna iz poutoji vordinu py skrajšiny skrajšiny



$$\varphi = \varphi_0 - \alpha$$

$$\xi = r \cos(\alpha - \varphi) - r \cos \alpha = x(\cos \varphi - 1) + y \sin \varphi$$

$$\eta = r \sin(\alpha - \varphi) - r \sin \alpha = y(\cos \varphi - 1) - x \sin \varphi$$

$$\zeta = 0$$

$$\xi = r \cos(\alpha - \varphi) - r \cos \alpha$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 2(\cos \varphi - 1) \quad !$$

Wtje ta \uparrow razina poligonomi obptorni tytko v rozi vektorskih tytko

Zato vidi se, da je v vsaki točki vseh pout

to sta karakteristiki, da vseh skrajšiny nalo

ale jeh \uparrow razina računam s'ostoy?

Ogólni :

$$\xi = cy^2$$

$$\zeta = -cyx$$

$$\eta = f_c(xz)$$

~~$$X_1 = Y_1 - Z_2 = 0$$~~

$$X_1 = Y_1 - Z_2 = 0$$

$$X_2 = 0$$

$$X_y = T(cz + \frac{\partial \eta}{\partial x})$$

$$Z_y = T(-cx + \frac{\partial \eta}{\partial z})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} X_y = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (X_1) + \frac{\partial}{\partial z} V_2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0$$

dla pos. wartości y:

$$X_1 = X_1 \cos nx + X_2 \cos n2 = 0$$

$$Y_1 = Y_1 \cos nx + Y_2 \cos n2 = 0$$

$$Z_1 = Z_1 \cos nx + Z_2 \cos n2 = 0$$

$$cz \sin(\varphi - nx)$$

$$c(2 \cos nx - x \cos n2) + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \eta}{\partial z} \cos n2 = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \eta}{\partial z} \cos n2 = 0$$

zinc równani obrotu

$$f(x, y) = 0$$

$$c \left(2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \frac{dx}{a^2} = - \frac{b^2}{a^2} \frac{dy}{b^2}$$

$$c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x} x + \frac{\partial \eta}{\partial z} z = 0$$

$$c(b^2 - a^2)xz + (b^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \eta}{\partial z}) = 0$$

$$c(b^2 - a^2) + (b^2 + a^2)\alpha = 0$$

$$\cos nx \sim dz = b^2 x$$

$$\sin nx \sim -dx = a^2 z$$

$$\eta = \alpha x^2 + \beta z^2$$

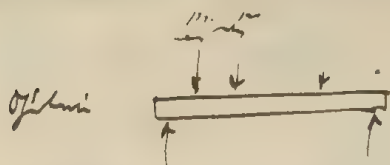
$$\eta = \alpha x^2$$

$$\eta = c \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x^2$$

paraboloida hiperbolyczna

$$\text{Norma} = \int (X_y^2 - Z_y^2) dx dz = Tc \left\{ \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \int z^2 dx + \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \int x^2 dz \right\} = \pi Tc \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

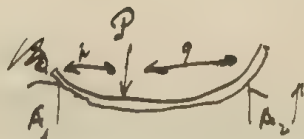




$$\sum_0^l P \Rightarrow A_0 - \sum_0^x P = Y_n$$

$$M_x = \cancel{P \cdot x} \cdot A_n - \sum_0^x P(x-r)$$

$$V_x = \frac{dM}{dx}$$



$$P = A_1 + A_2 = A_1 \left(1 + \frac{a}{r}\right)$$

$$A_1 = A_2$$

$$KE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = A_1 x$$

$$\parallel \quad = A_1 x - P(x-r)$$

$$KE y = A_1 \frac{x^3}{6} + a x + b$$

at point \$x=r\$

$$y_1 = y_2$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x}$$

joint

$$y_1 = y_2$$

$$A_1 = A_2$$

$$\begin{matrix} x=0 & x=l \\ y=0 \end{matrix}$$

at ends obtain \$a, b\$



Displacement \$y\$

joint design point - to obtain the design point the value of \$y\$ is zero

at joint; the value of \$y\$ is zero at the joint

Obtain \$y\$ by joint - value of \$y\$ is zero; obtain the value of \$y\$

$$T = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\frac{K}{2(1+\nu)} = \frac{3}{4(1+\nu)}$$

$$\frac{K}{2} = a$$

$$K R + m r^2 \omega = c$$

$$m r \omega^2 = \frac{m M k}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{M k}{\omega^2}$$

$$K R + m \omega \left(\frac{M k}{\omega^2} \right)^{2/3} = c$$

$$K R + m \left(\frac{M^2 k^2}{\omega} \right)^{1/3} = c$$

$$K R + m r^2 \sqrt{\frac{M k}{r^3}} = c = K R + m \sqrt{M k r}$$

$$K \alpha^3 + \frac{A}{\alpha} = c$$

$$K \alpha^4 - K R_0 \alpha - m r_0^2 \omega_0 \alpha = m \sqrt{M k} \alpha_0 = 0$$

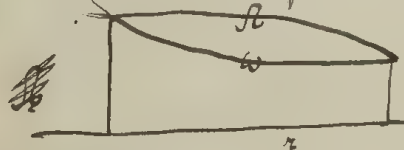
$$K \alpha (\alpha^3 - R_0 - \frac{m r_0^2 \omega_0}{K}) = 0$$

$$\alpha = \sqrt[3]{R_0}$$

Lösung aus oben: $\sqrt[3]{\omega} = \alpha$

$$K \alpha^4 - c \alpha = -m \sqrt{M k} \alpha$$

$$= m \sqrt{\omega_0^4 \cdot R_0}$$



Stetig Lösung: $(K + R^2 M) R + (k + m r) \omega = c$

$$m r \omega^2 = M R \omega^2 = \frac{m M k}{(R+r)^2}$$

$$(K + \frac{m^2}{M}) R + (k + m r) \omega = c$$

$$\left[K + \frac{m^2}{M} \left(\frac{A}{\omega^2} \right)^{2/3} \right] R + \left[k + m \left(\frac{A}{\omega^2} \right)^{1/3} \right] \omega = c$$

$$\alpha^3 K + \frac{m^2}{M} \frac{A^{2/3}}{\alpha} + k m \frac{A}{\alpha} = c$$

$$R = \frac{m r}{M}$$

$$r^3 \omega^2 = \frac{M k}{(1 + \frac{m}{M})^2} = A$$

$$\left(K + \frac{m^2}{M} \right) R + (k + m r) \sqrt{\frac{A}{R^3}} = c$$

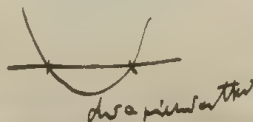
an dieser Stelle muss R

positiv sein, da es sich um eine physikalische Größe handelt, die nicht negativ sein kann.

$$\alpha = \omega$$

$$\alpha = 0$$

muss positiv sein



$$K \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 4\pi a \varphi = \text{curl } \varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\text{curl } \varphi$$

$$K \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 4\pi \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nabla^2 \varphi$$

$$e^{i(\alpha t + j\lambda x)}$$

$$\varphi = a e^{i\alpha t - \beta x} = a e^{i\alpha t - \beta x}$$

$$\alpha = \frac{2\pi \lambda}{K} \pm \sqrt{\left(\frac{2\pi \lambda}{K}\right)^2 + \frac{K}{4}}$$

$$-\alpha^2 + 4 \frac{i\pi \lambda a}{K} = \frac{J^2}{K}$$

$$\beta = \mu + i\nu$$

$$\left. \begin{aligned} \mu^2 - \nu^2 &= -K\alpha^2 \\ \mu\nu &= \frac{2\pi \lambda a}{K} \end{aligned} \right\}$$

$$= \frac{\mu^2 - \nu^2 + 2i\mu\nu}{2}$$

$$\varphi = a e^{i(\alpha t - \nu x) - \mu x}$$

$$= a e^{-\mu x} \sin(\alpha t - \nu x)$$

$$= a e^{-\mu x} \sin$$

$$\mu^2 - \frac{4\pi^2 \lambda^2 \alpha^2}{\mu^2} = -K\alpha^2$$

$$\mu^4 + \mu^2 K\alpha^2 = 4\pi^2 \lambda^2 \alpha^2$$

$$\mu = \sqrt{-\frac{K\alpha^2}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2 \alpha^4}{4} + 4\pi^2 \lambda^2 \alpha^2}}$$

$$K=1 \quad \alpha = \frac{2\pi}{\epsilon}$$

$$\mu^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \left[\sqrt{1 + \lambda^2 \epsilon^2} - 1 \right]$$

$$\nu^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \left[\sqrt{1 + \lambda^2 \epsilon^2} + 1 \right]$$

$$\eta_2 = \frac{\epsilon}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \lambda^2 \epsilon^2}}$$

$$\eta = \frac{i\frac{\epsilon}{2}\beta}{\alpha} = \frac{4(i\mu - \nu)}{\alpha}$$

$$\rho = \frac{\frac{i\mu}{\alpha} - \frac{\nu}{\alpha} - 1}{\frac{i\mu}{\alpha} - \frac{\nu}{\alpha} + 1} = \frac{\left[\left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right) - \frac{i}{2}\right] \left[1 + \frac{\nu}{\alpha} - \frac{i}{2}\right]}{(1 - \frac{\nu}{\alpha})^2 + (\frac{\mu}{\alpha})^2}$$

$$\rho_2 = \frac{1 - (\frac{\nu}{\alpha})^2 - (\frac{\mu}{\alpha})^2}{(1 - \frac{\nu}{\alpha})^2 + (\frac{\mu}{\alpha})^2}$$

$$\frac{n-1}{n+1} \parallel$$

$$\frac{3\pi}{20} R^2 \alpha^3 + \frac{m}{H} \frac{\sqrt[3]{\omega_0^4} r_0^2}{\alpha} = \frac{3\pi}{20} R^2 R_0 + \frac{m}{H} r_0^2 \omega_0$$

$$\frac{3\pi}{20} R^2 + \left(\frac{m}{H} r\right)^2$$

$$\frac{3\pi R^2}{20} \alpha^3 + \frac{m}{H} \frac{r_0^2 \sqrt[3]{\omega_0}}{\alpha} = \frac{3\pi R^2}{20} R_0 + \frac{m}{H} r_0^2 \omega_0$$

$$\left(\frac{60}{80}\right)^2$$

$$\frac{3\pi}{20}$$

$$\frac{1}{80} (60)^2 \frac{1}{29}$$

$$\frac{314.3}{842}$$

$$\frac{2.61}{8} = \frac{3}{2}$$

$$10.47 = 10.5$$

$$= 1.5$$

$$\text{pyth. } \alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{1.5}{10.5}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3}$$

$$\alpha_1^3 = 3$$

$$\alpha_2^3 = \frac{64}{27} = 2$$

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{\omega_0^2 r_0^3}{\omega^2}} = r_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{2/3}$$

$$= \frac{60}{9} r_0$$

59 km

$$K \frac{d\Omega}{dt} = -\alpha \frac{(\Omega - \omega)}{r^3}$$

$$= -\alpha \frac{(\Omega - \omega) \omega^2}{H K}$$

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = \sum Y_x - X_y$$

$$\frac{d}{dt} \sum m r^2 \frac{d\theta}{dt} =$$

$$\frac{d}{dt} (K \frac{d\theta}{dt}) = M_2$$

$$Y = a e^{-i\mu x} \sin(\alpha t - \nu x)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial t} = -a e^{-i\mu x} [\mu \sin + \nu \cos]$$

$$N = \frac{a e^{-i\mu x}}{\alpha} [\mu \cos(\alpha t - \nu x) - \nu \sin \dots]$$

$$E \sin(k(t - \frac{\mu x}{c}))$$

$$-i\mu \frac{E}{c}$$

$$-i\mu \frac{E}{c} \sin(\alpha(t - \frac{\mu x}{c}))$$

$$\cancel{a_1 \sin \alpha t} = \cancel{a_2 \sin \alpha t}$$

$$E \sin \alpha t + R \sin(\alpha t + \delta) = a \sin(\alpha t + \varepsilon)$$

$$- \frac{E}{c} \sin \alpha t - \frac{R}{c} \sin(\alpha t + \delta) = -\frac{a}{c} \sin(\alpha t + \varepsilon) + \frac{a}{c} \mu \cos(\alpha t + \varepsilon)$$

$$E + R \cos \delta = a \cos \varepsilon$$

$$R \sin \delta = a \sin \varepsilon$$

$$E + R \cos \delta = a \frac{\nu c}{\alpha} \cos \varepsilon + a \frac{\mu c}{\alpha} \sin \varepsilon = a \cos \varepsilon$$

$$R \sin \delta = a \frac{\nu c}{\alpha} \sin \varepsilon - a \frac{\mu c}{\alpha} \cos \varepsilon = a \sin \varepsilon$$

$$\tan \varepsilon = \frac{\frac{\mu c}{\alpha}}{\frac{\nu c}{\alpha} + 1} = \frac{\mu c}{\nu c + \alpha}$$

$$= \frac{1 - \frac{\nu c}{\alpha}}{\frac{\mu c}{\alpha}} = \frac{\alpha - \nu c}{\mu c}$$

$$= \frac{R \sin \delta}{R \cos \delta + E}$$

$$\alpha^2 - \nu^2 c^2 = \mu^2 c^2$$

$$R^2 = \alpha^2 + E^2 + 2ER \cos \delta$$

$$E^2 + R^2 + 2ER \cos \delta = \alpha^2 = (E + R \cos \delta)^2 +$$

$$= \left[\frac{\mu c}{\alpha} + \frac{\nu c}{\alpha} \right]^2$$

Halters:

$$\frac{5 \text{ km}}{h}$$

$$125 \text{ km}$$

$$220 \text{ m}$$

Florida - Apex
= N.Y. - Mexico

4.1
} 60°

Florida

$$8 \frac{\text{km}}{h}$$

$$60$$

$$400$$

$$n = \frac{R}{4}$$

$$\frac{5 \text{ km}}{h} = \frac{5 \text{ km} \cdot 24}{1600 \text{ km}} = \frac{12}{160} = \frac{3}{40}$$

$$\frac{m}{h} \cdot \frac{2R\pi \cdot 125 \text{ km} \cdot \frac{1}{4}}{R^3\pi \cdot 5.6} = \frac{6400 \cdot 125 \cdot 3}{32 \cdot (6400)^2 \cdot 5.6} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{40 \cdot 10^6} = \frac{1}{2 \cdot 10^7}$$

$$\frac{n^2}{R^2} = \frac{\left(\frac{R}{4}\right)^2}{\frac{32}{20} R^2} = \frac{20}{3.16 \cdot \pi} = \frac{2}{48.31} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 10^7} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^7} = \frac{1}{2} 10^{-9}$$

$$86,400' \cdot 365 = 3.10^8$$

$$\lambda = \sqrt{m^2 + s^2} \quad y = \frac{m}{2} \left(x^{\frac{2}{m}} + e^{-\frac{2}{m}} \right)$$

42

$$Eg \frac{dy}{dx} = \sqrt{m^2 + s^2}$$

$$Eg x = \int ds \sqrt{m^2 + s^2} = s \sqrt{m^2 + s^2} - \int \frac{s^2}{\sqrt{m^2 + s^2}} ds = \int \frac{m^2 s}{\sqrt{m^2 + s^2}} ds$$

$$\xi = s \frac{x}{2} \quad \eta = s \frac{y}{2} \quad \zeta = s \frac{z}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (X_x) = 0$$

$$\sigma = A \omega l$$

$$= [A \cos t + D \sin t] \sin p x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos t + D_n \sin t}{\sin p_n x} \sin p_n x$$

$$[A \cos t + D \sin t] \sin p l = A \sin p l$$

$$D = \frac{A}{\sin p l}$$

$$\begin{aligned} \int_{x'}^l (x' - x) dx &= x'x - \frac{x^2}{2} = \\ x'l - \frac{l^2}{2} - x'^2 + \frac{x'^2}{2} \\ &= -\frac{(x' - l)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\theta E \frac{d^2 y}{dx^2} = P(l - x) + \frac{1}{2} X \frac{(x' - l)^2}{2}$$

$$\theta E \frac{d^3 y}{dx^3} = -P + X \frac{2(x' - l)}{2}$$

$$\theta E \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{1}{2} X$$

$$= \rho g \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\frac{y}{R} = \frac{u^4}{R'}$$

$$f = \omega \frac{x}{n} \quad y = uy \quad z = wz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \omega + \omega' \frac{x^2}{n}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \omega' \frac{xy}{n}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \omega' \frac{xz}{n}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dots = 3\omega + \omega' n$$

$$X_x = 2T \left[\omega + \omega' \frac{x^2}{n} + L(2 + 4' n) \right]$$

$$X_y = 2T \omega' \frac{xy}{n}$$

$$X_z = 2T \omega' \frac{xz}{n}$$

$$\omega' \frac{x}{n} + 2\omega' \frac{x}{n} + \omega'' \frac{x^3}{n^2} - \omega' \frac{x^3}{n^2} + 3L \omega' \frac{x}{n} + L \omega' x + L \omega' \frac{x}{n}$$

$$+ \frac{\omega' x}{n} + \omega'' \frac{x^2}{n^2} - \omega' \frac{x^2}{n^2}$$

$$+ \frac{\omega' x}{n} + \omega'' \frac{x^2}{n^2} - \omega' \frac{x^2}{n^2}$$

$$= \frac{\omega' x}{n} (4 + 4L) + \omega'' \frac{x}{n} + L \omega'' x$$

$$\frac{4\omega' (1+L)}{n} + \omega'' (1+L) = 0$$

$$n^4 \omega'' + \frac{4\omega' n^3}{n} = 0$$

$$d(\omega' n^4) = 0$$

$$\omega' n^4 = a$$

$$\omega' = \frac{a}{n^4}$$

$$\omega = -\frac{a}{3n^3} + b$$

$$3\omega + \omega' n = 3b$$

z rovností do něm zapomeny d'Alamberta

$$X_x = 2T \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa \Delta \right]$$

$$X_y = T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$X_x = 2T \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$= (1-2\mu) \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \frac{4E}{1+\mu} + \frac{E}{1+\mu} = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \Delta u + (T + \kappa) \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \Delta \theta$$

Do usay: $T=0$

$$\mu = \frac{1}{2}$$

$$\kappa = \frac{2T\mu}{1-2\mu}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} = \frac{T \cdot 2(1+\mu)}{3(1-2\mu)}$$

$$X_x \sim \Delta \quad Y_y \sim \Delta \quad Z_z \sim \Delta \quad X_x = Y_y = Z_z = p$$

$$(\rho - \rho_0)$$

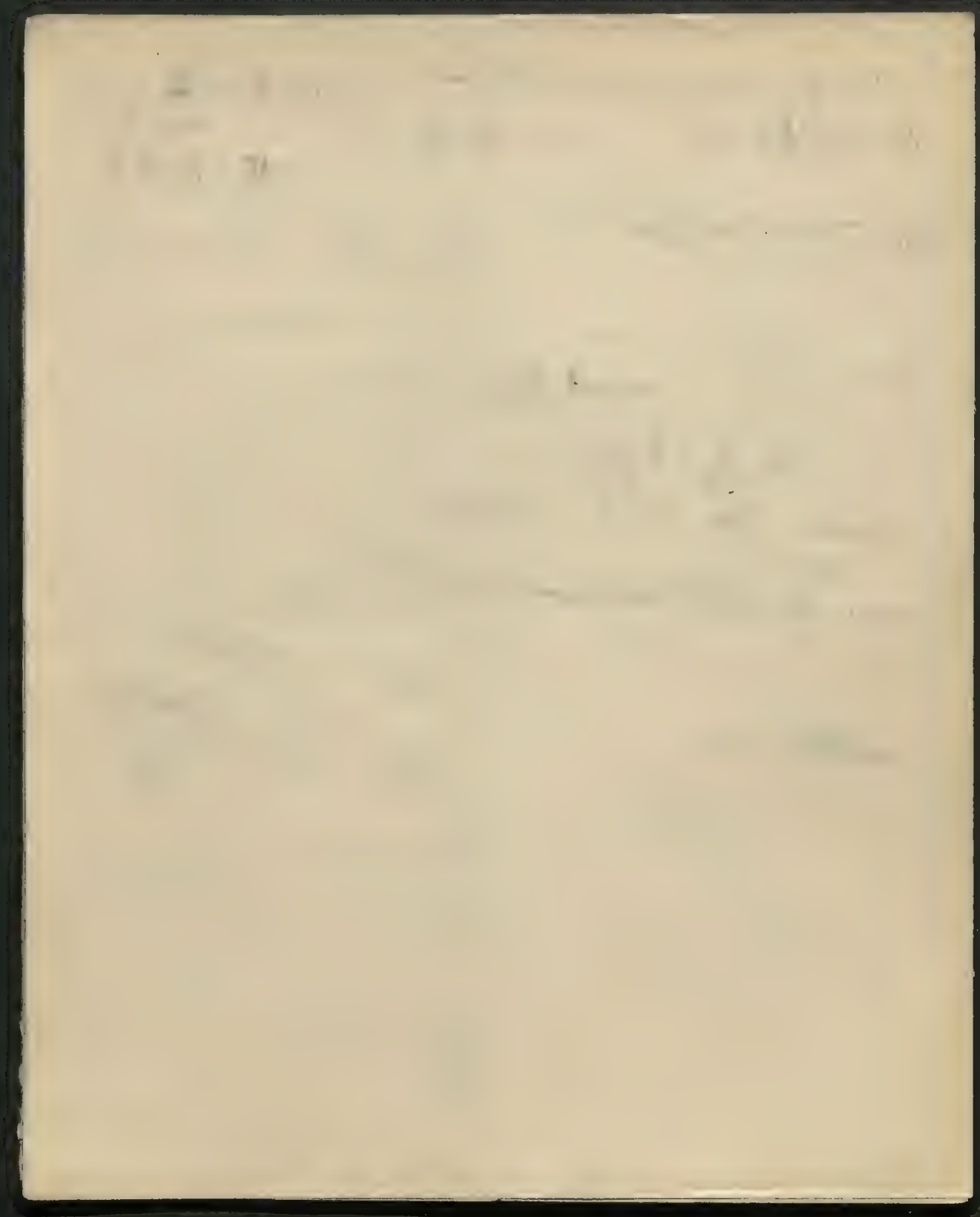
$$p = p_0 \rho$$

Wtedy $X_x = p \approx (\rho - \rho_0)$ jest temp. nie zmienia

$$L = \frac{\mu E}{(1-2\mu)(1+\mu)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L \Delta u$$

$$2T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L \Delta u \quad \parallel \quad \frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E}{1-2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



$$\begin{aligned}
 x' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z = x(1+a_1) + \frac{(a_2+b_1)}{2} y + \frac{(a_3+c_1)}{2} z + \frac{a_2-b_1}{2} y + \frac{a_3-c_1}{2} z \\
 y' &= y(1+b_1) + \frac{b_1+a_2}{2} x + \frac{b_3+c_2}{2} z + \frac{b_3-c_2}{2} z + \frac{b_1-a_2}{2} x + \frac{b_3-c_2}{2} z \\
 z' &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x' &= x(1+a_1) + \frac{a_2+b_1}{2} y + \frac{a_3+c_1}{2} z + \frac{a_2-b_1}{2} y - \frac{c_1-a_3}{2} z \\
 y' &= y(1+b_1) + \frac{a_2+b_1}{2} x + \frac{b_3+c_2}{2} z + \frac{a_2-b_1}{2} x + \frac{b_3-c_2}{2} z \\
 z' &= z(1+b_1) + \frac{a_2+b_1}{2} x + \frac{b_3+c_2}{2} y + \frac{c_1-a_3}{2} x - \frac{b_3-c_2}{2} y
 \end{aligned}$$

$$\frac{a_2+b_1}{2} = \frac{1}{2} \frac{a_2}{E} = \frac{1}{2} = (1+\mu) \frac{A}{E} = (1+\mu) \frac{X}{E}$$

$$a_1 =$$

88. wyrażenie w klamkach osi: musimy mieć te ostatnie wyraż. w 3 post. kreski

$$x_2 = (1+\lambda) [u x + v y + w z] \quad y_2 = (1+\mu) [u' x + v' y + w' z] \quad z_2 = (1+\nu) [$$

$$x_3 = u x_2 + u' y_2 + u'' z_2$$

$$= x [(1+\lambda) u^2 + (1+\mu) u'^2 + (1+\nu) u''] + y [(1+\lambda) u v + (1+\mu) u' v' + (1+\nu) u'' v''] + z [(1+\lambda) u w + (1+\mu) u' w' + (1+\nu) u'' w'']$$

$$x_3 = x [1 + \lambda u^2 + \mu u'^2 + \nu u''] + y [\lambda u v + \mu u' v' + \nu u'' v''] + z [$$

$$y_3 =$$

$$z_3 =$$



$$(x+iy) = 1 - e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1} + \operatorname{arctg} \sqrt{e^{-2w} - 1}$$

$$\operatorname{arctg} = \int_0^w \frac{dw}{1+w^2}$$

$$w = \rho + i\varphi$$

$$I). \varphi = 0 \quad 0 < \rho < \infty$$

$$x = 1 - e^{-\rho} - \sqrt{e^{-2\rho} - 1} + \operatorname{arctg} \sqrt{e^{-2\rho} - 1}$$

$$y = 0$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$II). \varphi = -\infty \quad 0 < \rho < \infty$$

$$x = 1 - 2e^{-\rho} \cos \varphi + \frac{\pi}{2}$$

$$y = 2e^{-\rho} \sin \varphi$$

$$\sqrt{x+iy} = \sqrt{R} e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{R} \cos \frac{\theta}{2} + i \sqrt{R} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{R} e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{R} \cos \frac{\theta}{2} + i \sqrt{R} \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{R+x}{2}} + i \sqrt{\frac{R-x}{2}}$$

$$III). \varphi = \pi \quad -\infty < \rho < 0$$

$$x = 1 + e^{-\rho} + \sqrt{e^{-2\rho} - 1} + \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{e^{-2\rho} - 1} \quad \sqrt{\frac{R-x}{2}}$$

$$y = 0$$

$$2+\pi < x < \infty$$

$$IV). \varphi = \pi \quad 0 < \rho < \infty$$

$$\operatorname{arctg} i\sqrt{e^{-2\rho} - 1} = i \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1+e^{-2\rho}}{1-e^{-2\rho}}}$$

$$x = 1 + e^{-\rho} + \pi$$

$$y = \sqrt{1 - e^{-2\rho}} - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\rho}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\rho}}}}$$

$$V). \varphi = \infty \quad 0 < \rho < \infty$$

$$x = 1 + \varphi$$

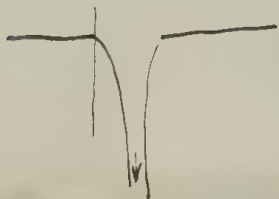
$$y = 1 - \frac{1}{2} \varphi^2$$

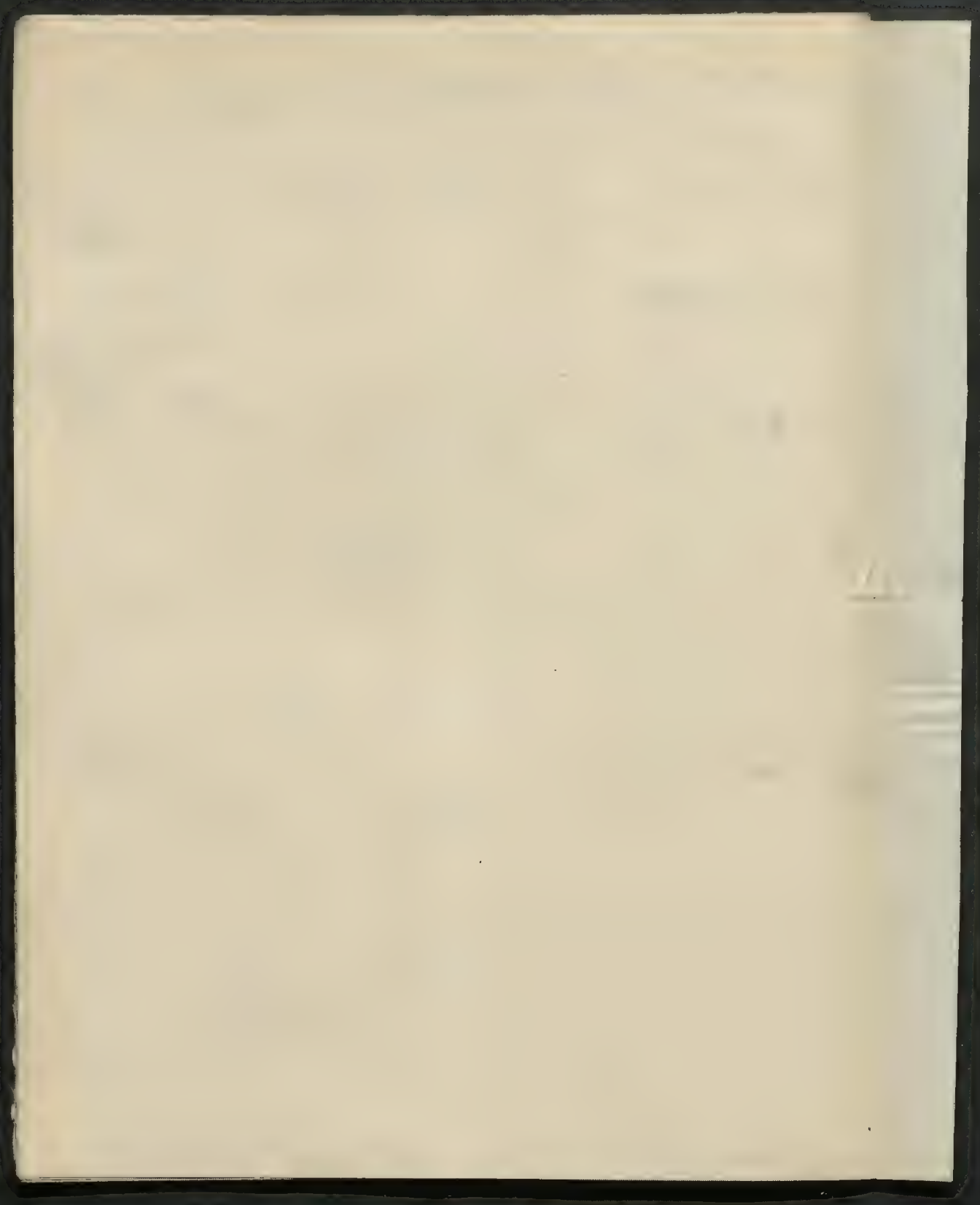
$$(y \rightarrow -\infty)$$

$$VI). \varphi = 0 \quad 0 < \rho < \infty$$

$$x = 1 - e^{-\rho}$$

$$y = \sqrt{1 - e^{-2\rho}} + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\rho}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\rho}}}}$$





Effort of pump

#

46

$$\int \frac{dV}{\rho} = -\frac{V^2}{2} + C$$

$$V^2 = \frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

$$= \frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(1 - \frac{p_0 - p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

$$= \frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(1 - \frac{k-1}{k} \frac{p_0 - p}{p_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{k-1}{k} \right)^2 \left(\frac{p_0 - p}{p_0} \right)^2 - \dots \right) \right]$$

$$= 2 \frac{p_0}{\rho_0} \frac{p_0 - p}{p_0} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{k} \left(\frac{p_0 - p}{p_0} \right)^2 + \dots \right]$$

wie die mit $\frac{p_0 - p}{p_0}$ pro Densität $V^2 \sim \frac{1}{\rho_0}$ die stärke des

$$\text{Maxim } V = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}}$$

$$V^2 = \frac{2}{k-1} (c_0^2 - c^2)$$

oder typisch

genauer Reynolds kriterium: $V \leq c$

$$c^2(k-1) = 2c_0^2 - 2c^2$$

$$V_N^2 = \frac{2}{k-1} (c_0^2 - \frac{2c_0^2}{k+1}) = \frac{2c_0^2}{k+1}$$

$$c^2 = \frac{2c_0^2}{k+1}$$

$$V_N^2 = \frac{2k}{k+1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_N}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

$$1 - \frac{k-1}{k+1} = \left(\frac{p_N}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{2}{k+1}$$

$$p_N = p_0 \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

kritische

Das ist die kritische Geschwindigkeit für

Strömung, Mach, Schall



$$\omega^2 \frac{M}{2}$$

$$\frac{\omega^2 A^2}{2} = \frac{k M}{A}$$

$$U = \frac{k M}{A^2 + a^2 - 2 a \omega \theta} + \frac{\omega^2}{2} (A - a \omega \theta)^2$$

$$= \frac{k M}{A^2} + \frac{k M}{A^3} (A - a \omega \theta)^2$$

$$= \frac{k M}{A} \left\{ \left[1 + \frac{a^2}{A^2} \omega^2 \theta^2 \right]^{1/2} + \frac{A}{A} (1 - \frac{a}{A} \omega \theta)^2 \right\}$$

$$= \frac{k M}{A} \left[1 - \frac{a^2}{2 A^2} - \frac{a}{A} \omega \theta - \frac{3}{2} \frac{a^2}{A^2} \omega^2 \theta^2 + 1 + 2 \frac{a}{A} \omega \theta + \frac{a^2}{A^2} \omega^2 \theta^2 \right]$$

$$= - \frac{k M}{(A^2 - 2 a A \omega \theta + a^2)^{1/2}} + \frac{k M}{A^2} a \omega \theta$$

$$= \frac{3}{2} M \frac{k a^2}{A^3} \left(\frac{1}{3} - \omega^2 \theta \right)$$

$$y = \frac{k M a}{a^2}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{M}{M_0} \left(\frac{a}{A} \right)^3 a \left(\omega^2 \theta - \frac{1}{3} \right)$$

$$0.79 \text{ feet } \odot$$

$$1.80 \text{ feet } \odot$$

1.80 feet

1.80 feet

1.80 feet

1.80 feet

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 \right)$$

$$r^2 = r_0^2 + \frac{\alpha}{\ell} (r^2 - r_0^2)$$

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r^2 - r_0^2}{\ell} = \frac{2r}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \right) = \alpha$$

$\frac{1}{2}$

$$R \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\alpha}{r} \frac{r^2}{2} = \frac{\alpha}{r} \frac{r^2}{2} + J$$

$$u = \frac{\alpha}{r} \frac{r^2}{2} + J$$

$$0 = \frac{\alpha}{r} \frac{R^2}{2} + J$$

$$u = \frac{\alpha}{r} \frac{r^2 - R^2}{2}$$

$\text{Vol}_r =$

$$2\pi r u dr = \frac{2\pi \alpha}{r \cdot \rho_\mu} \left(\frac{R^4}{4} - \frac{r^4}{4} \right) = \frac{2\pi \alpha R^4}{16 \rho_\mu}$$

$$\text{Vol}_{\frac{r_1+r_2}{2}} = \text{Vol}_r \cdot \frac{r}{\frac{r_1+r_2}{2}} = \frac{2\pi R^4}{16 \rho_\mu (r_1+r_2)} = \frac{2\pi R^4 (r_1+r_2)}{8 \rho_\mu}$$

$$X_2 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$X_2 = -\tau + \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$V_1$$

$$Z_2$$

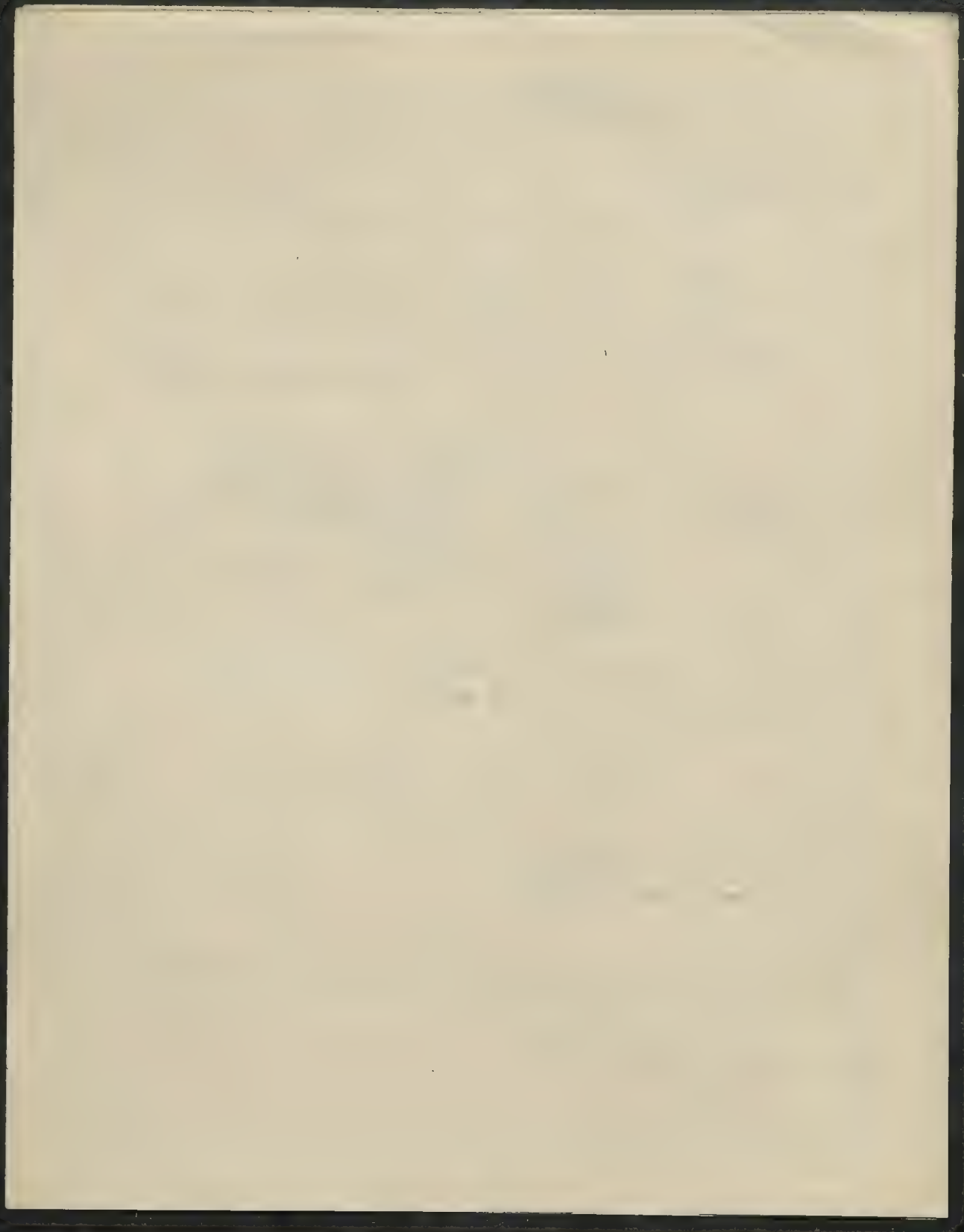
$$3\lambda + 2\mu = 0$$

$$\lambda = \frac{X_2 + \frac{1}{3} \sigma_2}{3}$$

$$X_2 = -\tau + \frac{2}{3} \mu \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\tau + \frac{2}{3} \mu \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho X_2 - \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u$$



$$\rho = A \frac{x}{z^3}$$

$$\frac{CQ}{\mu} \rho \ll$$

$$u = -\frac{3}{9} \frac{CQx^2}{z^3} \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + c \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{z} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{z^3}\right)$$

$$v = -\frac{3}{4} \frac{CQxy}{z^3} \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)$$

$$w =$$

$$\rho_{xx} = \frac{x}{2} \rho_{xx} + \frac{y}{2} \rho_{xy} + \frac{z}{2} \rho_{xz} = - = -\frac{x}{a} \rho_0 + \frac{1}{2} \frac{y}{a} \frac{C}{a}$$

$$\rho_{xy} = -\frac{y}{a} \rho_0$$

$$\rho_{xz} = -\frac{z}{a} \rho_0$$

$$u_1 = a + b \left(\frac{3x^2}{z^3} - \frac{1}{z^3} \right) - c \left(\frac{x^2}{z^3} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\rho_1 = 0$$

$$v = 3b \frac{xy}{z^3} - c \frac{xy}{z^3}$$

$$\Delta V = \frac{1}{\mu} \rho$$

$$w = 3b \frac{xz}{z^3} - c \frac{xz}{z^3}$$

$$u = \frac{\partial V}{\partial x} + u'$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u' = 0 \\ \Delta v' \\ \Delta w' \end{array} \right\}$$

$$v = \frac{\partial V}{\partial y} + v'$$

$$w = \frac{\partial V}{\partial z} + w'$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\mu} \rho$$

$$\rho = 2c u \frac{\partial(\frac{1}{z})}{\partial x}$$

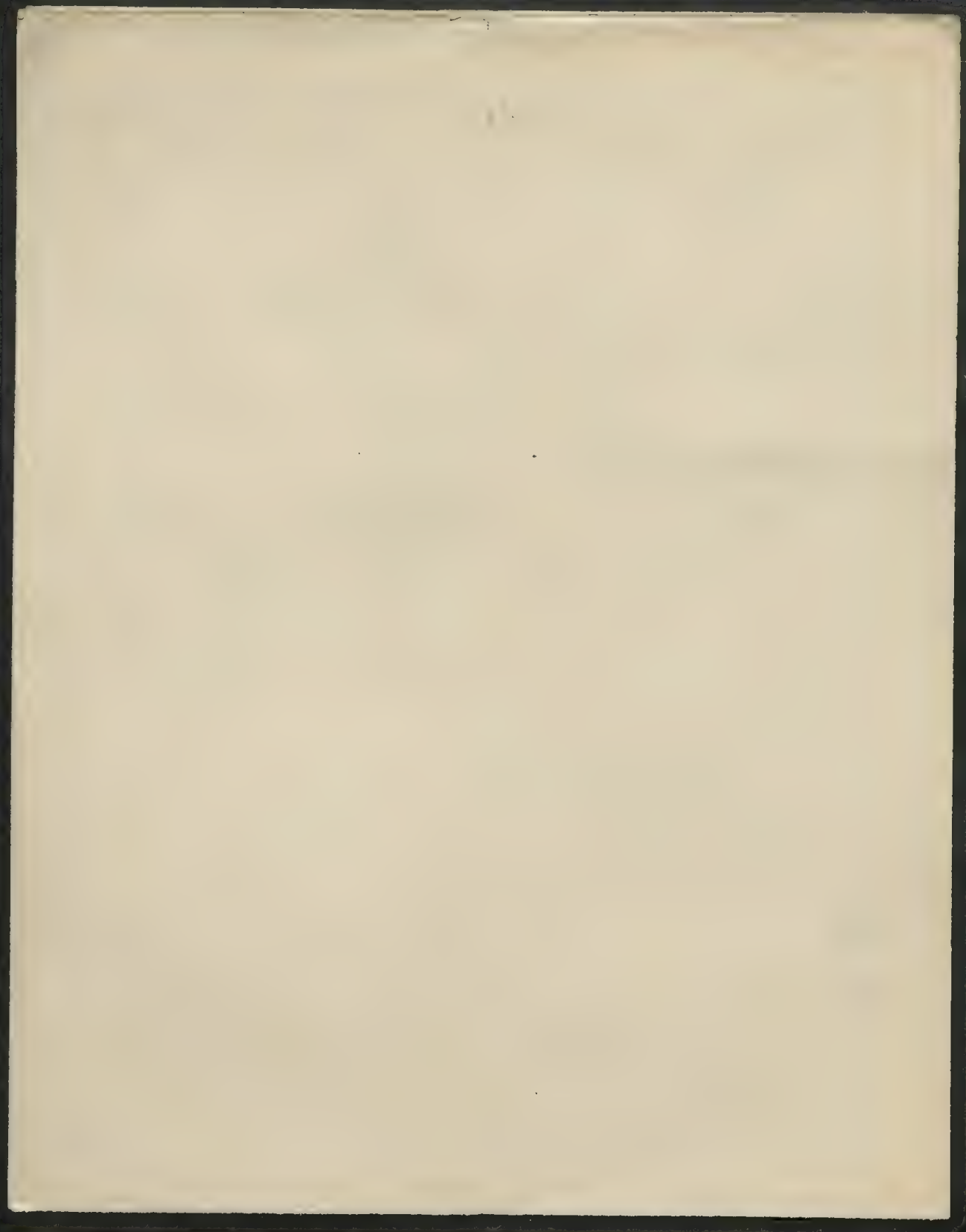
$$V = u x + b \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$u' = v' = 0 \quad u' = -\frac{2c}{z}$$

$$X = 6\pi \mu a c$$

$$\Delta^2 \left(\frac{x^2}{z^4} \right)$$

$$\Delta^2 \left(\frac{x^3}{z^4} \right)$$



$$v = \frac{1}{2R} (x^2 + \mu y^2 - \mu z^2)$$

$$w = \frac{\mu}{R} yz$$

$$u = \frac{1}{R} yx$$

Uyunka 2 tip in 0 yigalim pur y

2). shatq 20

3). shatq u KX pur. x

1. y 2 pur. 2

49

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{R}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{R}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\mu}{R}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\mu y}{R}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\mu z}{R}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\mu z}{R}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\mu y}{R}$$

$$\Delta = \frac{y}{R} (2\mu - 1)$$

$$X_n = -2T \frac{y}{R} + K \frac{y}{R} (2\mu - 1) = -\frac{y}{R} \left(\frac{E}{1+\mu} + \frac{(1-2\mu) E \mu}{1+\mu (1-2\mu)} \right) = -y \frac{E}{R}$$

$$Y_y = 2T \frac{\mu y}{R} + K \frac{y}{R} (2\mu - 1) = +\frac{y}{R} \left(\frac{\mu E}{1+\mu} - \frac{E \mu}{1+\mu} \right) = 0$$

$$Z_z = 0$$

$$X_y = 0 = X_z = Y_z$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\mu}{R}$$

Ket purgura kolony

$$\Delta \varphi = \frac{M}{E \Theta} l$$



Cornu, Mallock

Tatir tekni. 1. 2. 3.

Ispeyga nishan

Uy shadig'ra nishan A purgura wana

Oshiqura: purtegi moment

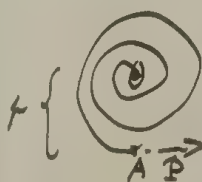
$$k \cdot 0 = M = \mu P$$

Koide ushi shadig'ra turan

moment

$$\Delta \varphi = \frac{\mu P l}{E \Theta}$$

shadig'ra ushi nishan



$$u = y a (2a + 6bx)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6bcy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2ax + 3bx^2$$

$$v = ax^2 + bx^3 - 6bcy\mu$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2(a + 3bx)c$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$w =$$

$$X_y = 2T [ac + 3bxc + 2ax + 3bx^2] = 0 \quad x = \pm h$$

$$\left. \begin{aligned} 3bc + 2a &= 0 \\ ac + 3bh^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= -\frac{3bc}{2} \\ -\frac{3bc^2}{2} + 3bh^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$c^2 = 2h^2$$

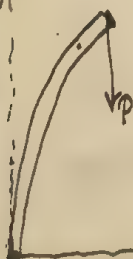
$$c = h\sqrt{2}$$

$$a = -\frac{3bh}{\sqrt{2}}$$

$$X_2 = 0$$

$$X_x = 2T [6bcy] + \kappa [6bcy] = \frac{E}{\mu + 1} + \frac{\mu E}{(\mu + 1)(1 - 2\mu)} = \frac{E(1 - \mu)}{(\mu + 1)(1 - 2\mu)} \cdot 6bcy$$

y)



$$\text{moment inty } P(x_l - x) = \frac{E\theta}{R} = E\theta \frac{dx}{dy}$$

$$y=0: x=0; \frac{dx}{dy}=0; \quad \text{II}$$

$$y=l: x=x_l$$

$$P \xi = -E\theta \frac{d\xi}{dy}$$

$$\xi = A \sin y \sqrt{\frac{P}{E\theta}} + D \cos y \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$

I II

$$x = x_l - A \sin y \sqrt{\frac{P}{E\theta}} + D \cos y \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$

$$x_l = -B \sin y \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$

$$0 = -A \sin y \sqrt{\frac{P}{E\theta}} + D \cos y \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$

$$A = D \cos y \sqrt{\frac{P}{E\theta}} = -x_l \cos y \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$

$$x = x_l \left[1 + \frac{\cos y \sqrt{\frac{P}{E\theta}}}{\cos y \sqrt{\frac{P}{E\theta}}} \right]$$

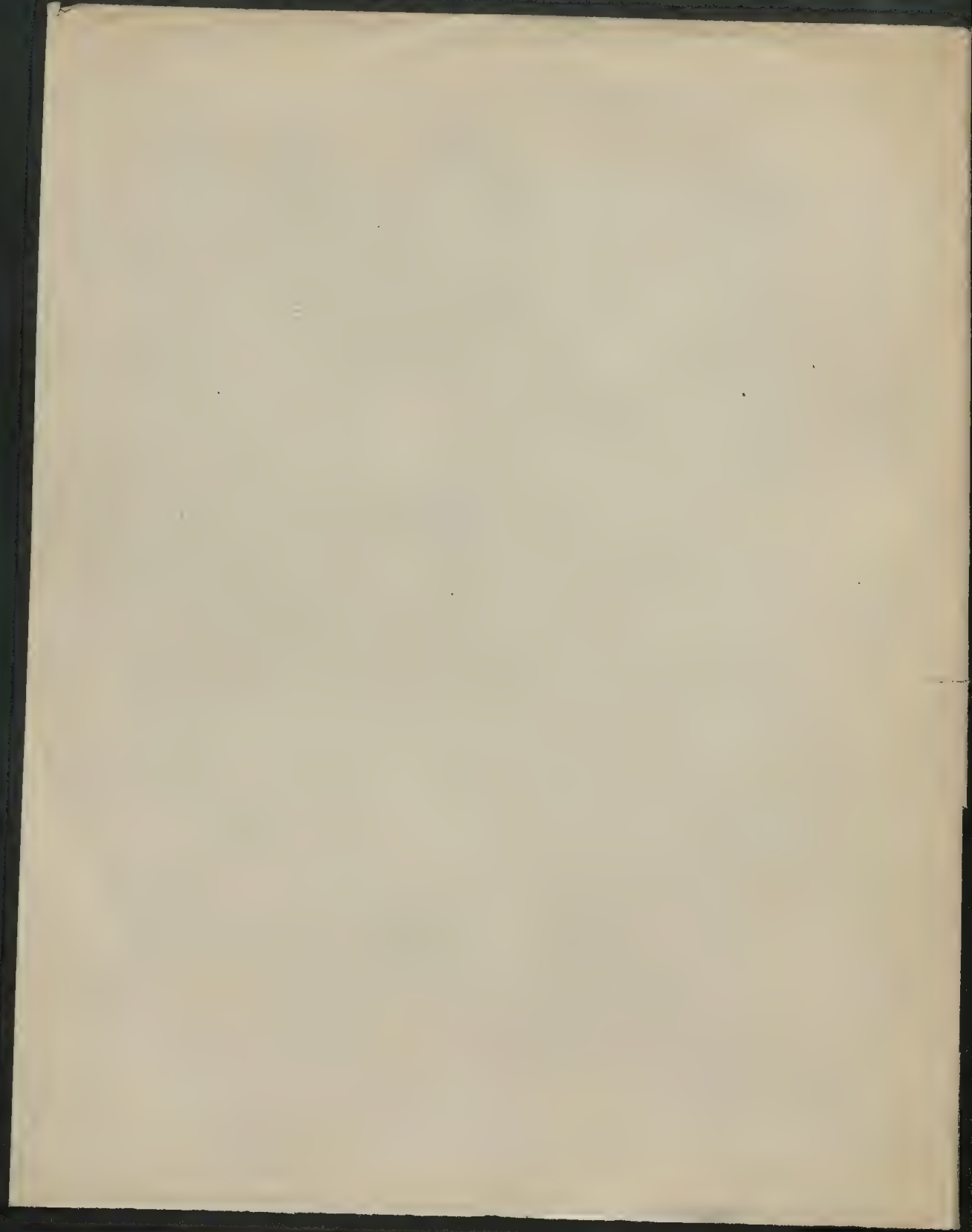
$$= x_l \left[1 + \frac{\sin(y - l) \sqrt{\frac{P}{E\theta}}}{\sin l \sqrt{\frac{P}{E\theta}}} \right]$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x_l \sqrt{\frac{P}{E\theta}}}{\sin l \sqrt{\frac{P}{E\theta}}} \cos(y - l) \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$

$$\cos l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} = 0$$

$$l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} = \frac{\pi}{2}$$

note that the study
shows that the nature
of the problem is to
find the shape of the
beam in the xy-plane
to satisfy the boundary
conditions at the ends
and the equilibrium
equations.



6.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{E\theta} y = 0$$

$$y = A \cos \alpha x = A \sin \frac{k\pi x}{l} \quad \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 = \frac{P}{E\theta}$$

$$U = \frac{E\theta}{2} \int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx + \sum a \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$= \frac{E\theta}{2} \left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 (A^2 + a_k^2) + \sum \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 a_m^2 \right]$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -k_{\pi}^2 A \cos \frac{k\pi x}{l} = -\sum \frac{m\pi}{l} a_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$V = \frac{P}{2} \int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

$$= \frac{P}{2} \left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 (A + a_k)^2 + \sum \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 a_m^2 \right]$$

$$\underbrace{\left[E\theta \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - P \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \right]}_{=0} (A + a_k)^2 + \sum a_m^2 \left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 E\theta - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 P \right] > \underbrace{\left[E\theta \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - P \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \right]}_{=0} A^2$$

$$\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 E\theta > \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 P$$

$$m^4 > k^2 m^2$$

$$m > k$$

dla dowolnego m i k prawdziwy jest tylko $k=1$
z wyjątkiem $k=0$

w rezultacie $\delta V = 0$ to znaczy, że dla każdego k istnieje przystępna i poprawna konstrukcja.

$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 (A + a_k)^2 + \sum a_m^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 > \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 A^2$$

$$k^2 (A + a_k)^2 + \sum m^4 a_m^2 > A^2 k^2$$

tylko dla $k=1$

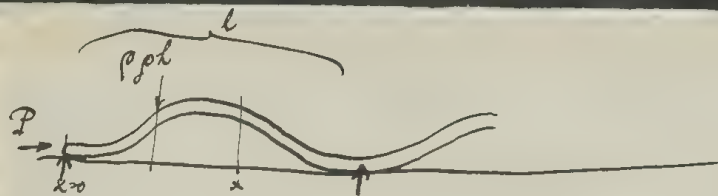
przy $k=1$ mamy:

$$k^2 (A + a_k)^2 + \sum m^4 a_m^2 = k^2 A^2$$

$$\sum (m^4 - m^2 k^2) a_m^2 > 0$$

tylko dla $k=1$ jest $m^2 > k^2$
dla $k=1$

z powyższych
wskazówek
wynika



$$M_0 = -Mx + pgh \int_0^x (x-\xi) d\xi + Py = -E\theta \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$-M + pghx + P \frac{dy}{dx} = -E\theta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{P}{E\theta} \frac{dy}{dx} + \frac{pgh}{E\theta} x = \frac{M}{E\theta}$$

$$y = A \sin(x \sqrt{\frac{P}{E\theta}}) + \frac{pgh}{2P} \frac{x^2}{2} + B + \frac{M}{P} x$$

$$x=0$$

$$y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=0$$

$$A = 2$$

$$M = pgh \frac{l}{2}$$

$$0 + A \sin \varepsilon = 0$$

$$A \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \cos \varepsilon + \frac{M}{P} = 0$$

$$\frac{M}{P} \sqrt{\frac{E\theta}{P}} + A \cos \varepsilon = 0$$

$$x=l$$

$$y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=0$$

$$y = B(1 - \cos x \sqrt{\frac{P}{E\theta}}) + \frac{M}{P} \sqrt{\frac{E\theta}{P}} \sin x \sqrt{\frac{P}{E\theta}} + \frac{M}{P} x - \frac{pgh}{P} \frac{x^2}{2}$$

$$y = B \left[1 - \cos x \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \right] + \frac{pghl}{2P} \left[x - \sqrt{\frac{E\theta}{P}} \sin x \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \right] - \frac{pgh}{P} \frac{x^2}{2}$$

$$0 = B \left[1 - \cos l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \right] + \frac{pghl}{2P} \left[\sqrt{\frac{E\theta}{P}} \sin l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \right]$$

$$0 = B \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \sin l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} + \frac{pghl}{2P} \cos l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} - \frac{pghl}{2P}$$

$$\left[\sqrt{\frac{E\theta}{P}} \sin l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \right] \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \sin l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} + \left[1 - \cos l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \right] \left[\cos l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} + 1 \right]$$

$$\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \sin l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} + \cos l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} = 1$$

$$\sin l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} + 1 - \cos l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} = 0$$

$$1 = 1$$

$$B = \frac{pghl}{2P} \sqrt{\frac{E\theta}{P}} \cot \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$

rotationspunkt 2 wankwinkel pro m
spindelung

wie jedes willkürliche punkt

y znowu ~~nie~~ ujemna,
 to tak długo dopóki $\frac{h}{4} \sqrt{\frac{P}{E\theta}} = \frac{\pi}{2}$

to znaczy dopóki $P < 4 E\theta \frac{\pi^2}{h^2}$ (inliczając Kockformel!)

~~to jest wartość powyżej dla której P = 4 E\theta \frac{\pi^2}{h^2}~~

Czyli Długość przy tym stopniu przykrycia nie zmienia się

długość przy wyginęciu przykrycia

$$M_0 - Mx + pgh \int_0^x (x-\xi) \frac{d\xi}{\cos y} + Py = -E\theta \frac{d^2 y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

$$M_0 - Mx + pgh \int_0^x (x-\xi) \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) d\xi + Py = -E\theta \frac{d^2 y}{dx^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]$$

$$M_0 - Mx + pgh \int_0^x (x-\xi) d\xi + Py + \frac{pgh}{2} \int_0^x (x-\xi) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 d\xi = -E\theta \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{3}{2} E\theta \frac{d^2 y}{dx^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

tworzy y ustąpi: $y = y_0 + y_1$, przy czym y_0 będzie ugięciem prostoliniowym równania
 a dodatkowe y_1 anagolowy mę z porównano.

$$D \sin \alpha = \frac{\rho g h l}{2P} \frac{\sqrt{E\theta}}{P} \sin \alpha \cos$$

$$D \frac{\sqrt{P}}{E\theta} \sin \alpha \cos = \frac{\rho g h l}{2P} \cos \alpha$$

$$B = \frac{\rho g h l}{2P} \frac{\sqrt{E\theta}}{P} \operatorname{ctg} \frac{l}{2} \frac{\sqrt{P}}{E\theta}$$

$$y = + \frac{\rho g h l^2}{8P} - \frac{\rho g h}{2P} \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{\rho g h l}{2P} \frac{\sqrt{E\theta}}{P} \operatorname{ctg} \frac{l}{2} \frac{\sqrt{P}}{E\theta} 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \frac{\sqrt{P}}{E\theta} - \frac{\rho g h l}{2P} \frac{\sqrt{E\theta}}{P} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{P} \cos$$

$$= \frac{\rho g h}{2P} \left[\frac{l^2}{4} - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \right] + l \frac{\sqrt{E\theta}}{P} 2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{P}}{\sin \frac{l}{2} \sqrt{P}} \left(\cos \frac{l}{2} \sqrt{P} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{P} - \sin \frac{l}{2} \sqrt{P} \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{P} \right)$$

$$y = \frac{\rho g h}{2P} \left[\frac{l^2}{4} - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \right] + 2l \frac{\sqrt{E\theta}}{P} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{E\theta}{P}}}{\sin \frac{l}{2} \sqrt{\frac{E\theta}{P}}} \sin \frac{x-l}{2} \sqrt{\frac{E\theta}{P}} \right]$$

$$y_{\max} = y_{\frac{l}{2}} = \frac{\rho g h}{2P} \left[\frac{l^2}{4} + 2l \frac{\sqrt{E\theta}}{P} \frac{\sin^2 \frac{l}{4} \sqrt{\frac{E\theta}{P}}}{\sin \frac{l}{2} \sqrt{\frac{E\theta}{P}}} \right] = \frac{\rho g h l}{2P} \left[\frac{l^2}{4} - \frac{\sqrt{E\theta}}{P} \operatorname{tg} \frac{l}{4} \sqrt{\frac{E\theta}{P}} \right]$$

dla modytu $\frac{P}{E\theta}$: $\operatorname{tg} x = x \frac{(1 - \frac{x^2}{6})}{1 - \frac{x^2}{2}} = x \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$

$$y_{\max} = \frac{\rho g h l}{2P} \left[\frac{l^2}{4} - \sqrt{\frac{E\theta}{P}} \frac{l}{4} \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \left(1 + \frac{l^2}{48} \frac{P}{E\theta}\right) \right]$$

$$= - \frac{\rho g h l^4}{384 \cdot E\theta}$$



Wzskazanie rozwiązania: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$$24ax + 6b + \frac{\rho g h}{E\theta} x = \frac{\rho g h l}{2E\theta}$$

$$a = - \frac{\rho g h}{24 \cdot E\theta}$$

$$b = \frac{\rho g h l}{12 \cdot E\theta}$$

$$y_{\max} = y_{\frac{l}{2}} = - \frac{\rho g h l^4}{384 \cdot E\theta}$$

$$\begin{cases} al^2 + bl + c = 0 \\ 4al^2 + 3bl + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -al^2 + c = 0 \\ -2al^2 + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = al^2$$

$$y = \frac{\rho g h}{24 \cdot E\theta} \left[-x^4 + 2lx^3 - l^2x^2 \right]$$

$$y = A \sin(\alpha x) + f$$

$$-\alpha^3 A \sin(\alpha x) + \frac{P}{E\theta} \alpha A \cos(\alpha x) + \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{P}{E\theta} \frac{df}{dx} = \frac{P\theta}{E\theta} \left[\frac{l}{2} - x \right]$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3} + \alpha^2 \frac{df}{dx} = \beta^4$$

$$f = x^4 + x^2$$

$$f = \frac{\beta^4 x^4}{4!} - \alpha x^2$$

$$f = \alpha x^4 + \beta x^2 + c x + b$$

$$24\alpha + \alpha^2 [12\alpha x^2 + 2\beta] - \beta^4 = 0$$

$$f = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + \dots$$

$$4! a_2 + \frac{6!}{2!} a_3 x^2 + \frac{8!}{4!} a_4 x^4 + \frac{10!}{6!} a_5 x^6 \dots$$

$$+ \alpha^2 [2a_1 + 4 \cdot 3 a_2 x^2 + 6 \cdot 5 a_3 x^4 + 8 \cdot 7 a_4 x^6] - \beta^4 = 0$$

$$4! a_2 + 2 a_1 x^2 - \beta^4 = 0$$

$$a_2 = \frac{\beta^4 - 2 a_1 x^2}{4!}$$

$$a_1 = \frac{\beta^4 - 4! a_2}{2 x^2}$$

$$\frac{6!}{2!} a_3 = 4 \cdot 3 a_2 x^2$$

$$a_3 = - \frac{4! a_2 x^2}{6!}$$

$$\frac{8!}{4!} a_4 = 6 \cdot 5 a_3 x^4$$

$$a_4 = - \frac{6! a_3 x^4}{8!} = \frac{4!}{8!} a_2 x^4$$

$$f = a_0 + \beta^4$$

$$a_5 = - \frac{8! a_4 x^6}{10!} = - \frac{4!}{10!} a_2 x^6$$

$$f = a_0 + \frac{\beta^4 - 4! a_2}{2 x^2} x^2 + a_2 \left[\frac{\beta^4}{4!} - \frac{4!}{6!} x^2 + \frac{4!}{8!} x^4 - \frac{4!}{10!} x^6 + \dots \right]$$

$$= a_0 + \frac{\beta^4 x^2}{2 x^2} - 4! a_2 \left[\frac{\alpha x^2}{2!} - \frac{\alpha x^4}{4!} + \frac{\alpha x^6}{6!} - \dots \right]$$

$$= a_0 + \frac{\beta^4 x^2}{2 x^2} + A [-\cos(\alpha x)] + D 2 \alpha x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$M = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$P = \frac{\partial M}{\partial x}$$

$$y = \text{not for } \frac{a^2 x^2}{2}$$

$$a^2 f = a^2 f''$$

$$f = e^{\beta x}$$

$$\frac{a^2}{a^2} = \beta^2$$

$$\beta = \pm \frac{a}{a}$$

$$\frac{a}{a} x$$

$$\frac{a}{a} x$$

$$\frac{a}{a} x$$

$$\frac{a}{a} x$$

$$\int x (q(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x (x-\xi) f(\xi) d\xi + P_x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x f(\xi) d\xi =$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \int_0^x f(\xi) d\xi$$

On know when

$$u = A(\cos x' + \cosh x') + B(\cos x' - \cosh x') \\ + C(\sin x' + \sinh x') + D(\sin x' - \sinh x')$$

$$(\cosh m - \cos m)^2 = \sinh^2 m - \sin^2 m \\ [\cosh m - \sinh m = 1]$$

$$\cosh m \cosh m = 1$$

$$m \text{ for } \frac{2k-1}{2} \pi$$

$$n \sim 1, (3)^2, (5)^2, \dots$$

$\rightarrow I = \mathbb{N}^2$

1. - Tr 1 -

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 84

$$y = e^{\mu x} \quad \mu^4 + \frac{P}{E\theta} \mu^2 + \frac{\rho g}{E\theta} = 0$$

55



$$M = M_0 + \rho g \int_0^x y \, d\xi (x - \xi) = -[E\theta \frac{d^2 y}{dx^2}]$$

$$y \frac{d^4 y}{dx^4} + \int_0^x y \, d\xi = -\frac{E\theta}{\rho g} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

$$y'''' = -\frac{E\theta}{\rho g} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{E\theta}{\rho g}}$$

$$y = \sum C e^{\pm \alpha x}$$

$$l = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{\rho g}{E\theta}}$$

$$= 2\pi \sqrt[4]{\frac{k^3 E}{12 \rho g}}$$

$$\theta = \frac{k^3}{12}$$

$$= 2\pi \sqrt[4]{\frac{12 \rho g}{k^3 E}}$$

$$\rho = 3$$

$$g = 10^3$$

$$k = 10^6$$

$$E = 5 \cdot 10^{11}$$

$$l = 2\pi \sqrt[4]{\frac{12 \cdot 3 \cdot 10^3}{10^{18} \cdot 5 \cdot 10^{11}}} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 6 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{29}}}$$

$$= 2\pi \sqrt[4]{10^{+25}} = 5 \cdot 10^6$$

$$= 10^7 = 100 \text{ km!}$$

$$P = Fa = 10^{15}$$

$$F = 2 \cdot 10^9$$

$$10^{-25}$$

$$10^{-13} \cdot 10^{-12}$$

$$10^{-25}$$

$$\frac{2 \cdot 10^{15}}{5 \cdot 10^9 \cdot 10^{18}} = \frac{2}{5 \cdot 10^{12}}$$



$$\rho g h R^2 n = S 2 \pi n h$$

$$S = \frac{\rho g R}{2\pi} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 0.10^8}{6} = 3 \cdot 10^4 \dots F = 10^9$$

$$\rho g x = \bar{r}$$

$$x = \frac{10^9}{3 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10^5 = \text{300 km} = 3 \text{ km}$$

$$R = 3 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$R = 5 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$R = 6 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$\frac{R}{a} = 3$$

radius of the

$$\frac{R}{a} = 3$$

$$R = 15 a$$

$$k \geq \frac{a}{\sqrt{E}}$$

$$\frac{R}{a} \leq \frac{F}{E}$$

$$\frac{R}{a} = \frac{F}{E}$$

$$\frac{R}{a} = \frac{F}{E}$$

$$h = \frac{a^3}{12}$$

radius of the

radius of the

$$\frac{a}{E} > \sqrt{\frac{F}{E}}$$

$$R = 15 a$$

$$R = 300$$

$$R = 600$$

$$\frac{F}{E}$$

$$\frac{E\theta}{R} + P_y = 0$$

$$+ \frac{dy}{ds} = -\alpha \sin \varphi$$

$y_0 = k \sin \varphi_0$ wadybna w punkcie φ_0 przegrywa

$$\alpha^2 = \frac{P}{E\theta}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = \alpha^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0) = 2\alpha^2 [\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}]$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 2\alpha ds = \frac{1}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$2\alpha ds + \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \alpha s = \int_{\frac{\varphi_0}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad k = \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}$$

$$y = \int \frac{dy}{ds} ds = \int \sin \varphi ds = \frac{1}{2\alpha} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}$$

Amplituda wychyleń: $a = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \sqrt{1 - \cos \varphi_0} = \frac{2}{\alpha} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$

przechylenie tyczy:
 $y = a \sin \alpha$
 $\left(\frac{dy}{ds} \right)_0 = a \alpha$
 $a = \frac{1}{\alpha} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$

$$x = \int \cos \varphi ds = \frac{1}{\alpha} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{4}$$

$$\cos \frac{\varphi_0}{2} = 2 \cos^2 \frac{\varphi_0}{4} - 1$$

$$d\varphi = \frac{2 d\alpha \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{1 - (2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{4})^2}}$$

$$d\alpha = \pm \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}}} = - \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi_0}{4} - \sin^2 \varphi}}$$

$$\sin \varphi = \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \alpha$$

$$d\alpha = - \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{d\varphi \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int \frac{[1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{4} \sin^2 \varphi]}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \varphi}} d(\sin \varphi)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{4} \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

$$\alpha s = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \alpha}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \varphi}}$$

dla mody $\frac{\pi}{2}$:

$$\alpha l = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \frac{3}{2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{4} \sin^2 \varphi] d\varphi = 2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{4} \frac{\pi}{4} \right] = \pi - \frac{3\pi}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{4} = \pi \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a^2 \alpha^4}{4} \right]$$

$$= \pi \left[1 - \frac{3 a^2 \alpha^4}{16} \right]$$

zupelnie to samo co zupomna $\frac{dy}{ds}$ przy φ_0

Dla Wadnie obrotu dla

$$\frac{E\theta}{R} + P_y + \rho g \int_0^x y(x-\xi) d\xi = 0$$

$$E\theta \frac{dy}{ds} + P_y + \dots$$

$$E\theta \frac{dy}{ds} + P \sin \varphi + \rho g \int_0^x y d\xi \cdot \cos \varphi = 0$$

$$E\theta \frac{d^2 y}{ds^2} + P \cos \varphi \frac{dy}{ds} + \rho g y \cos \varphi - \rho g \int_0^x y d\xi \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} = 0$$

$$E\theta \left[\frac{d^2 y}{ds^2} \cos \varphi + \frac{dy}{ds} \frac{d\varphi}{ds} \sin \varphi \right] + P \frac{dy}{ds} + \rho g \cos^2 \varphi = 0$$

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{a \alpha^2}{2}$$

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{a \alpha^2}{2}$$

$$\therefore \alpha l = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{a^2 \alpha^4}{16} \right]!$$

to samo co poprzednio z poprawkami

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \alpha^2 \frac{dy}{dx} + \frac{\rho g h}{E \theta} (x - \frac{l}{2}) = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 y + \frac{\rho g h}{E \theta} \frac{x^2 - lx}{2} = c \quad \text{--- } M_0$$

$$\frac{1}{2} \rho g h \frac{x^2 - lx}{2} = c$$

$$\frac{1}{2} = \frac{c}{12}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{E \theta}{\rho g h}}$$

$$\lambda > \sqrt{\frac{E \theta}{\rho g h}}$$

$$\lambda > \sqrt{\frac{E \theta}{\rho g h}}$$

$$c = 1.2 \text{ km} = 1200$$

$$\lambda > \frac{1200}{\sqrt{\frac{E \theta}{\rho g h}}}$$

$$> 220 \text{ km}$$

$$\frac{1}{2} \rho g h = \alpha^2$$

$$P = \alpha^2$$

$$\frac{1}{2} \rho g h = \alpha^2$$

$$\frac{1}{2} \rho g h = \alpha^2$$

$$\frac{1}{2} \rho g h = \alpha^2$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{E \theta}{\rho g h}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{E \theta}{\rho g h}} = 2 \sqrt{\frac{2.10^9 \cdot 1.1 \cdot 10^3 \cdot 3.10^3}{12.2 \cdot 10^3 \cdot 9.81}}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{3.10^3}{5.10^4} = \frac{3}{50}$$

increasing with increasing length

$$\lambda = 2 \sqrt{\frac{E \theta}{\rho g h}}$$

$$\lambda = 2 \sqrt{\frac{E \theta}{\rho g h}}$$

$$P = 2 \sqrt{\frac{E \theta}{\rho g h}} \quad \lambda = 2 \sqrt{\frac{E \theta}{\rho g h}} = 2 \sqrt{\frac{2.10^9 \cdot 1.1 \cdot 10^3 \cdot 3.10^3}{12.2 \cdot 10^3 \cdot 9.81}}$$

use by substituting

$$W \text{ kampf} = \frac{2 \sqrt{E \theta \rho g}}{\lambda} < \frac{P}{\lambda} < \text{Druckauftrieb}$$

$$2 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{E \theta \rho g}{(1-\mu^2)}}$$

$$2 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{E \theta \rho g}{(1-\mu^2)}}$$

$$\frac{\rho}{3(1-\mu^2)} \frac{E}{\theta} \frac{h \rho g}{F} = 1$$

$$F = 2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 9.81$$

$$h = \frac{F}{\rho g} \cdot \frac{1}{900} = \frac{4 \cdot 10^5}{900} = \frac{4}{9} \cdot 10^3 = 10 \text{ m!}$$

$$\lambda \neq 2 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{E \theta \rho g}{(1-\mu^2)}}$$

$$\frac{2}{3} \frac{8 \cdot 10^7 \cdot 1.1 \cdot 10^3}{(1-\mu^2) \cdot 9.81}$$

$$q = 6 \sqrt{\frac{8 \cdot 10^7 \cdot 1.1 \cdot 10^3}{3}} = 6 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{8}{3}} \neq 600 \text{ m}$$

$$\frac{P}{L} = \frac{2}{3} \frac{E \theta \rho g}{(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{\pi}{6 \cdot 10^4} \right)^2 + \rho g \left(\frac{6 \cdot 10^4}{\pi} \right)^2$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{10^9 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 1.1 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^8} + 2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^8$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 10^{11} + 8 \cdot 10^{11} = 9 \cdot 10^{11} \quad || F = 8 \cdot 10^8$$

~~Aty dla takiego równania~~

$$E\theta \frac{d^4 y}{dx^4} + P_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + \rho g y = 0$$

$$\begin{cases} y = a \sin \frac{\pi x}{l} & E\theta \frac{\pi^4}{l^4} - P_0 \frac{\pi^2}{l^2} + \rho g = 0 \\ P_0 = E\theta \frac{\pi^2}{l^2} + \rho g \frac{l^2}{\pi^2} \end{cases}$$

Wzrost - jednak

$$P = P_0 + p$$

$$E\theta \left[\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{3a^3}{8} \left(\frac{\pi}{l} \right)^6 \left(\sin \frac{\pi x}{l} + 9 \sin \frac{3\pi x}{l} \right) \right] + P \frac{d^2 y}{dx^2} + \rho g y = 0$$

$\left. \begin{array}{l} y \text{ brakuje w tym równaniu} \\ y = y_0 + y_1 \\ \text{czymy się z warunkiem} \\ y = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \\ \text{dla } x = l-1 \end{array} \right\}$

czy dla p dodatkowego wyzniknika a? λ dodatkowa?

Odejmujemy pierwsze równanie:

$$E\theta \left[-\frac{3a^3}{8} \left(\frac{\pi}{l} \right)^6 \left(\sin \frac{\pi x}{l} + 9 \sin \frac{3\pi x}{l} \right) \right] + p \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

Warunki $y=0$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ dla $x=l$ daje:

$$\sin \frac{\pi (l-1)}{l} = \sin \pi \left(1 - \frac{1}{l} \right) = \sin \frac{\pi}{l} = \sin \alpha$$

$$\sin \frac{3\pi (l-1)}{l} = \sin 3\alpha$$

$$\cos \frac{\pi (l-1)}{l} = -\cos \alpha$$

$$\begin{cases} a \sin \alpha + \frac{3a^3 \pi^5 E\theta}{16 [2\alpha^2 E\theta - P]} (l-1) \cos \alpha + \frac{27 a^3 \pi^6 P\theta}{8 [4\alpha^4 E\theta - 9\alpha^2 P + \rho g]} \sin 3\alpha = 0 \\ (y_0) - 3a^3 \pi^4 E\theta \left[\frac{\sin \alpha}{8 (2\alpha^2 E\theta - P)} + \frac{9\alpha^2 \sin 3\alpha}{8 [4\alpha^4 E\theta - 9\alpha^2 P + \rho g]} \right] = 0 \end{cases}$$

Warunki na a i l jako funkcje p

$$x=l:$$

$$a \sin \alpha l + \frac{3a^3 \alpha^5 E \theta}{16 [2\alpha^2 E \theta - P]} l \cos \alpha l + \frac{27}{8} \frac{a^3 \alpha^6 E \theta}{81 \alpha^4 E \theta - 9 \alpha^2 P + \rho g} \sin 3\alpha l = 0$$

$$\frac{3a^3 \alpha^6 E \theta}{8 [2\alpha^2 E \theta - P]} \sin \alpha l + \frac{27}{8} \frac{a^3 \alpha^6 E \theta}{81 \alpha^4 E \theta - 9 \alpha^2 P + \rho g} \sin 3\alpha l = 0$$

$$a^3 \alpha^6 \left[\frac{\sin \alpha l}{8 [2\alpha^2 E \theta - P]} + \frac{9 \sin 3\alpha l}{8 [10\alpha^2 E \theta - P]} \right] = 0$$

$$\sin \alpha l + \frac{3a^2 \alpha^5 E \theta}{16 [2\alpha^2 E \theta - P]} l \cos \alpha l + \frac{27}{8} \frac{a^2 \alpha^4 E \theta}{8 [10\alpha^2 E \theta - P]} \sin 3\alpha l = 0$$

$$\sin \alpha l = \delta \quad \alpha l = -1 + \frac{\delta^2}{2} \quad \sin 3\alpha l = 3\delta$$

$$\delta + \frac{3a^2 \alpha^5 E \theta}{16 [2\alpha^2 E \theta - P]} \left[-1 + \frac{\delta^2}{2} \right] + \frac{27}{64} \frac{a^2 \alpha^4 E \theta}{10\alpha^2 E \theta - P} 3\delta = 0$$

$$\delta = n - \alpha l$$

$$\alpha = \frac{n - \delta}{l}$$

$$\delta = \frac{3a^2 \alpha^5 E \theta l}{16 [2\alpha^2 E \theta - P]}$$

$$\alpha^2 = \frac{16 [2\alpha^2 E \theta - P]}{3\alpha^5 E \theta} \left[\frac{n}{l} - \alpha \right]$$

$$E \theta \alpha^4 - P \alpha^2 + \rho g = 0$$

protęgi d. W. d. m. w. m.

$$= \frac{16}{3\alpha^7} \frac{\alpha^4 E \theta - \rho g}{E \theta} \left[\frac{n}{l} - \alpha \right]$$

$$= \frac{16}{3\alpha^7} \left[\frac{\alpha^4}{E \theta} - \frac{\rho g}{E \theta} \right] \left[\frac{n}{l} - \alpha \right]$$

$$E \theta \frac{n^4 - 4n^3 \delta}{l^4} - P \frac{n^2 - 2n\delta}{l^2} + \rho g = 0$$

$$\frac{\delta}{l} = \frac{E \theta \frac{n^4}{l^4} - P \frac{n^2}{l^2} + \rho g}{4 E \theta \frac{n^3}{l^3} - 2 P \frac{n}{l}}$$

wp. (n, \delta)
= wp. (n, \delta) - 5 pl. wp. pl.
wp. (n, \delta) = wp. (n, \delta) + 5 pl. wp. pl.

$$\frac{1}{R} = \frac{dy}{dx^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{3}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

$y = a \sin \alpha x$

$$= \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{3}{2} a^3 \alpha^4 \sin \alpha x \cos^2 \alpha x$$

$$P \frac{d^2 y}{dx^2} + \rho g y = -E\theta \left[\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{3}{2} a^3 \alpha^4 \frac{d^2 y}{dx^2} \sin \alpha x \cos^2 \alpha x \right]$$

$$= \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{3 a^3 \alpha^4}{8} [\sin \alpha x + \sin 3\alpha x]$$

$$= -\frac{3 a^3 \alpha^6}{8} [\sin \alpha x + 9 \sin 3\alpha x]$$

x cos x

$$\cos x - x \alpha \sin x$$

$$-2 \alpha \sin x - x \alpha^2 \cos x$$

$$-3 \alpha^2 \cos x + x \alpha^3 \sin x$$

$$4 \alpha^3 \sin x + x \alpha^4 \cos x$$

to do this: $y = y_0 + a^2 x^2 y_1$ $\alpha = \frac{P}{l}$
 relevant hydro equations, plus
 any study $P = P_0 + p$ da hidrostática vertical a?
 then $E\theta \alpha^4 - P_0 \alpha^2 + \rho g = 0$

$$k \left\{ P(-2 \alpha \sin \alpha x - x \alpha^2 \cos x) + \rho g x \cos \alpha x + E\theta [4 \alpha^3 \sin \alpha x + x \alpha^4 \cos \alpha x] \right\} = \frac{3 a^3 \alpha^6 E\theta}{8} \sin \alpha x$$

$$= k \left\{ \sin(\alpha x) [-2 \alpha P + 4 \alpha^3 E\theta] + x \cos(\alpha x) [E\theta \alpha^4 - P \alpha^2 + \rho g] \right\} = \frac{3 a^3 \alpha^6 E\theta}{8} \sin \alpha x$$

$= 0$

$$k = \frac{3 a^3 \alpha^6 E\theta}{8} \frac{1}{4 \alpha^3 E\theta - 2 \alpha P}$$

$$y = y_0 + \frac{3 a^3 \alpha^5 E\theta}{16 [2 \alpha^2 E\theta - P]} x \cos \alpha x + m \sin 3 \alpha x$$

$$m \left\{ -9 \alpha^2 P + \rho g + 81 E\theta \alpha^4 \right\} = \frac{27}{8} a^3 \alpha^6 E\theta$$

$$y = y_0 + \frac{3 a^3 \alpha^5 E\theta}{16 [2 \alpha^2 E\theta - P]} x \cos \alpha x + \frac{27}{8} \frac{a^3 \alpha^6 E\theta}{81 \alpha^4 E\theta - 9 \alpha^2 P + \rho g} \sin 3 \alpha x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \alpha^2 \sin \alpha x - (\alpha^2 x \cos \alpha x + 2 \alpha \sin \alpha x) = -\frac{27 \cdot 9}{8} \frac{a^3 \alpha^8 E\theta}{81 \alpha^4 E\theta - 9 \alpha^2 P + \rho g} \sin 3 \alpha x$$

$$= -\alpha^2 y_0 - \frac{3 a^3 \alpha^6 E\theta}{8 (2 \alpha^2 E\theta - P)} \sin \alpha x - \frac{27 a^3 \alpha^8 E\theta}{81 \alpha^4 E\theta - 9 \alpha^2 P + \rho g} \sin 3 \alpha x$$

$$a[\sin \mu - \delta \mu \cos \mu] + \frac{3a^3}{16} \dots = 0$$

$$+ \sin \mu - \delta \mu \cos \mu$$

$$\frac{\sin \mu - \delta \mu \cos \mu}{A} + \frac{\sin 3\mu - 3\delta \mu \cos 3\mu}{B} = 0$$

$$\delta \mu =$$

$$\int_0^{l(1-\delta)} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx = l$$

$$\delta = f(a, P, l)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\alpha^2 y + k \sin \alpha x \quad ?$$

$$y = \frac{d}{dx} (x \sin \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 2 \alpha x + x \alpha \cos \alpha x$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = 2 \alpha \cos \alpha x - \alpha^2 x \sin \alpha x$$

$$y = a^{\frac{1}{\alpha}} \sin(\alpha x + \frac{\pi}{2}) + b \sin(\alpha x + \epsilon)$$

$$-a^2 x \sin(\alpha x + \frac{\pi}{2}) - 2 \alpha a \cos \alpha x - x \alpha^2 \sin \alpha x - b \alpha^2 \sin(\alpha x + \epsilon) = -\alpha^2 x \sin(\alpha x + \frac{\pi}{2}) - a^2 \sin(\alpha x + \frac{\pi}{2}) + k \sin \alpha x$$

$$2 \alpha a \cos \alpha x = k \sin \alpha x$$

(max $\cos = \sin \alpha x = 1$)

$$\cos \delta = 0$$

$$\delta = \frac{\pi}{2}$$

$$k = -2 \alpha a$$

$$y = -\frac{k}{2\alpha} x \cos \alpha x + b \sin(\alpha x + \epsilon)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\alpha^2 y - \frac{3\alpha^4 a^3}{8} (\sin \alpha x + \sin 3\alpha x)$$

von $\alpha^2 a^3 \sin$

$$y = + \frac{3\alpha^3 a^3}{16} x \cos \alpha x + \frac{y_0}{\alpha} \sin(\alpha x + \frac{\pi}{2}) + n \sin(3\alpha x + \frac{\pi}{2})$$

$$-9 n \alpha^2 \sin(3\alpha x + \frac{\pi}{2}) = -n \alpha^2 \sin(3\alpha x + \frac{\pi}{2}) - \frac{3\alpha^4 a^3}{8} \sin(3\alpha x)$$

$$n = \frac{3\alpha^2 a^3}{64}$$

$$y = y_0 + \frac{3\alpha^3 a^3}{16} x \cos \alpha x + \frac{3\alpha^2 a^3}{64} \sin 3\alpha x$$

$$a \sin \alpha x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\alpha^2 y - \frac{27\alpha^4 a^3}{64} \sin 3\alpha x - \frac{3\alpha^4 a^3}{8} \sin \alpha x - \frac{3\alpha^5 a^3}{16} x \cos \alpha x$$

$$= -\alpha^2 \sin \alpha x - \frac{3\alpha^3 a^3}{8} \sin \alpha x - \frac{27\alpha^3 a^3}{64} \sin 3\alpha x - \frac{3\alpha^3 a^3}{16} x \cos \alpha x$$

$$= -\alpha^2$$

y

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$x=l$$

$$y=0$$

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

$$- [e$$

$$+ [e$$



$$y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=0$$

$$A_1 + 0_1 = 0$$

$$\cancel{A_1}(\gamma^2 - \beta^2)(A_1 + 0_1) + 2\gamma\beta(A_2 - 0_2) = 0$$

$$A_2 = 0_2$$

$$y = A_1(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \cos \beta x + A_2(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) \sin \beta x$$

$$\frac{dy}{dx} = A_1 \left[\gamma(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) \cos \beta x \right] + A_2 \left[\gamma(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \sin \beta x \right] \\ - \beta(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \sin \beta x \quad - \left[+\beta(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) \cos \beta x \right]$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = A_1 \left\{ \gamma^2(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \cos \beta x - 2\gamma\beta(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) \sin \beta x - \beta^2(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \cos \beta x \right\} \\ + A_2 \left\{ \gamma^2(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) \sin \beta x + 2\gamma\beta(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \cos \beta x - \beta^2(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) \sin \beta x \right\}$$

$$x=l:$$

$$y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=0$$

$$A_1 = -A_2 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} \tan \beta l$$

$$- [e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}] \sin \beta l \left\{ (\gamma^2 - \beta^2)(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) \cos \beta l - 2\gamma\beta(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) \sin \beta l \right\} \\ + [e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}] \cos \beta l \left\{ (\gamma^2 - \beta^2)(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) \sin \beta l + 2\gamma\beta(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) \cos \beta l \right\} = 0$$

$$\boxed{(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l})^2 \sin^2 \beta l + (e^{\gamma l} - e^{-\gamma l})^2 \cos^2 \beta l = 0}$$

we're numerators!

$$\frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} \tan \beta l = -A_2$$

Enyiko lastika kine problemi:

61

$$y = a \sin \alpha x + \frac{3\alpha^3 a^3}{16} \cos \alpha x + \frac{3\alpha^2 a^3}{64} \sin 3\alpha x \quad \alpha = \frac{n}{l} = \sqrt{\frac{P_0}{EI}}$$

$$EI \frac{d^2 y_0}{dx^2} + P_0 y_0 = 0$$

$$EI \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{8} \alpha^4 a^3 (\sin \alpha x + \sin 3\alpha x) \right] + (P_0 + p) y = 0 \quad y = y_0 + y_1$$

$$EI \left[\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{1}{8} \alpha^4 a^3 (\cos \alpha x + \cos 3\alpha x) \right] + P_0 y_1 + p y_0 = 0$$

\downarrow
 $p a \sin \alpha x$

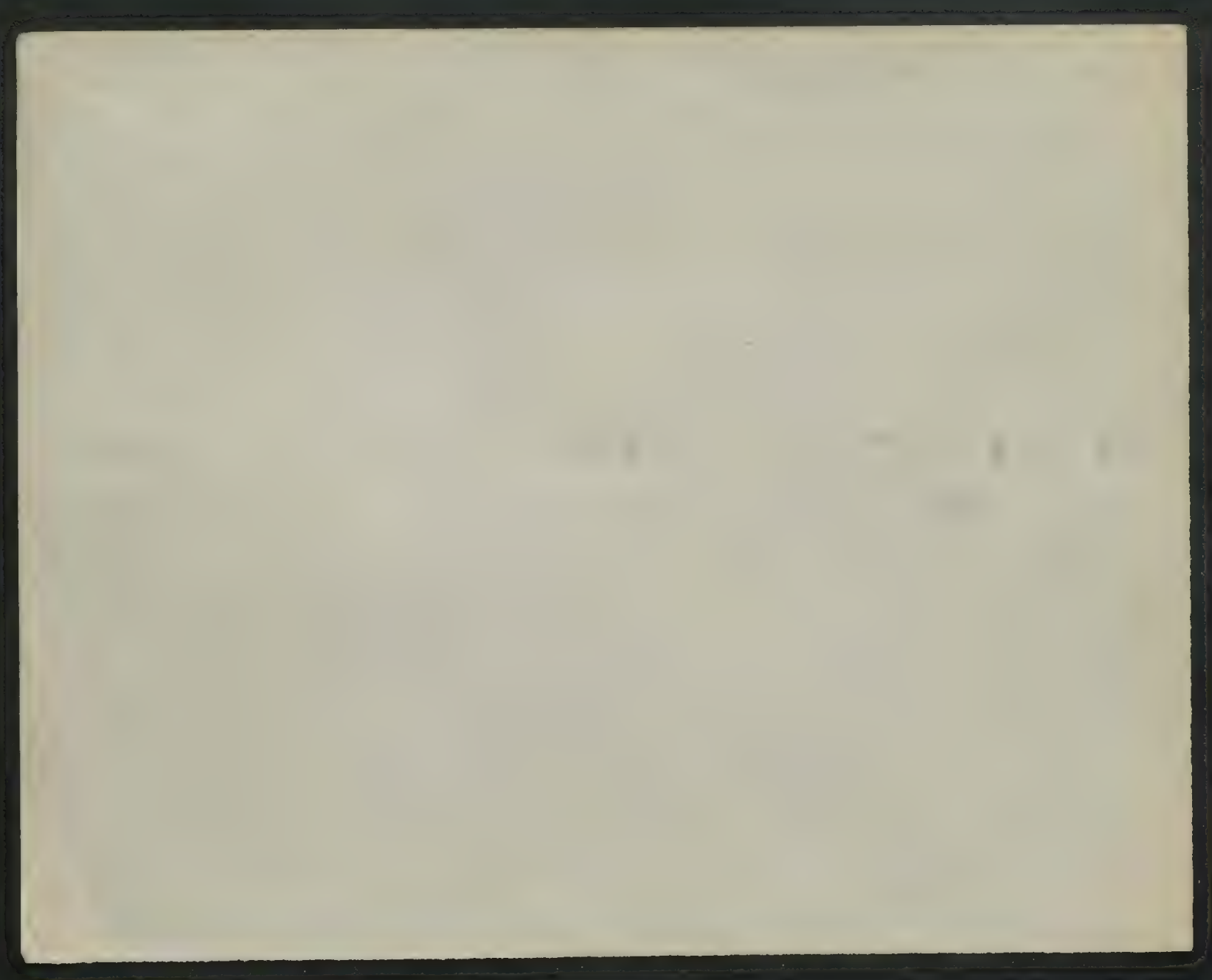
$$\alpha = \sqrt{\frac{P_0}{EI}}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{1}{8} \alpha^4 a^3 (\cos \alpha x + \cos 3\alpha x) + \left(\frac{3}{8} \alpha^4 a^3 + \frac{p a}{EI} \right) \sin \alpha x + \frac{3}{8} \alpha^4 a^3 \sin 3\alpha x = 0$$

$$y_1 = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{3}{8} \alpha^4 a^3 + \frac{p a}{EI} \right) x \cos \alpha x + \frac{3}{64} \alpha^2 a^3 \sin 3\alpha x$$

$$-\frac{3}{64} \alpha^4 a^3 + \frac{3}{64} \alpha^4 a^3 + \frac{3}{8}$$

$$\boxed{y = a \sin \alpha x + \left[\frac{3\alpha^3 a^3}{16} + \frac{p a}{2\alpha EI} \right] x \cos \alpha x + \frac{3}{64} \alpha^2 a^3 \sin 3\alpha x}$$



Jako zmienną $y = a \sin \left(\frac{h n x}{l} \right)$

62

$$U+V-W = (\alpha + b_h)^2 [E\theta \alpha^4 - P\alpha^2 + \rho g] + \sum_{k=1}^{h-1} b_k^2 [E\theta \frac{k^4 n^4}{l^4} - P \frac{k^2 n^2}{l^2} + \rho g] + \frac{\rho g}{k+1}$$

~~W~~ $P = E\theta \alpha^2 + \frac{\rho g}{\alpha^2}$

$$E\theta \frac{k^4 n^4}{l^4} - \frac{k n^2}{l^2} [E\theta \frac{k^2 n^2}{l^2} + \rho g \frac{l^2}{k n^2}] + \rho g =$$

$$E\theta (k^4 - k^2) \frac{n^4}{l^4} + \rho g [1 - \frac{k^2}{k^2}] > 0 \text{ dla } k > h \text{ i } k < h$$

$$[E\theta \frac{k^2 n^4}{l^4} - \rho g \frac{l^2}{k^2}] (k^2 - h^2) > 0$$

dla $k > h$ $E\theta \frac{n^4}{l^4} k^2 > \rho g \frac{l^2}{k^2} \therefore (kh)^2 > \frac{\rho g l^2}{E\theta \frac{n^4}{l^4}}$

dla $k < h$ $E\theta \frac{n^4}{l^4} k^2 < \rho g \frac{l^2}{k^2} \therefore (kh)^2 < \frac{\rho g l^2}{E\theta \frac{n^4}{l^4}}$

to będzie minimum jeżeli $\frac{\rho g l^2}{E\theta \frac{n^4}{l^4}} = \frac{\rho g l^2}{h^4}$

$$\frac{l}{h} = \lambda$$

$$\frac{l^4}{n^4} = \frac{E\theta}{\rho g} h^4$$

$$h^2 + l^2 = l^2$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

...
...
...

szukaj więc: $k = \lambda \pm \chi$

$$(h \pm \chi)^2 h^2 \geq M^2$$

$$h + \chi > \frac{M}{h}$$

$$h - \chi > \frac{M}{h}$$

$$\chi = 1, 2, 3, \dots$$

$$h+1 > \frac{M}{h}$$

$$h-1 > \frac{M}{h}$$

$$h^2 - h < M < h^2 + h$$

$$h^2(h-1)^2 < M^2 < h^2(h+1)^2$$

$$\lambda = n \sqrt{\frac{E\theta}{\rho g}}$$

...
...
dla l

Wtedy $P = E\theta \frac{l^4}{n^4} \left[\alpha^2 \sqrt{\frac{E\theta}{\rho g}} + \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\frac{\rho g}{E\theta}} \right]$

$$P = \sqrt{E\theta \rho g} \left[\alpha^2 \sqrt{\frac{E\theta}{\rho g}} + \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\frac{\rho g}{E\theta}} \right] \rightarrow 2 \sqrt{E\theta \rho g}$$

$$\frac{\rho g l^4}{E\theta n^4}$$

$$\frac{\rho g l^4}{E\theta n^4}$$

$$\frac{l^2}{a^2} \neq \frac{1}{\frac{P}{2E_0} + \sqrt{\left(\frac{P}{2E_0}\right)^2 - \frac{P_0}{E_0}}}$$

$$\frac{2}{l} \left[1 - \frac{3}{16} \frac{a^2 \frac{P^2}{l^2}}{2 - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4P_0 E_0}{P^2}}}} \right] = \sqrt{\dots}$$

$$= \frac{2}{l} \left[1 - \frac{3}{32} \frac{a^2 \frac{P^2}{l^2}}{1 - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4P_0 E_0}{P^2}}}} \right]$$

jużle jednak drugi powrót:

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{2E_0}} - \sqrt{\left(\frac{P}{2E_0}\right)^2 - \frac{P_0}{E_0}}$$

to będzie $\frac{P}{2E_0} \frac{l^2}{a^2} = \frac{2}{1 - \sqrt{1 - \frac{4P_0 E_0}{P^2}}}$

$$1 - \frac{3}{16} \frac{a^2 \frac{P^2}{l^2}}{2 - \frac{P}{E_0} \frac{l^2}{a^2}} = \frac{l}{2} \sqrt{\dots}$$

$$a^2 = \frac{16}{3} \frac{l^2}{a^2} \left(2 - \frac{P}{E_0} \frac{l^2}{a^2} \right) \left[1 - \frac{l}{2} \sqrt{\dots} \right]$$

$$= \frac{32}{3} \frac{1}{\frac{P}{2E_0} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{2E_0}\right)^2 - \frac{P_0}{E_0}}} \left[1 - \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4P_0 E_0}{P^2}}} \right] \left[1 - \frac{l}{2} \sqrt{\dots} \right]$$

musi być mniejsze niż 1

inaczej dwie możliwości: znak + ; $l < l_0$; a^2 maleje z wzrostem P wskutek

znak - ; $l > l_0$; $\left[\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{2E_0}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{4P_0 E_0}{P^2}}} - 1 \right]$ a^2 maleje z wzrostem P !

$$\frac{d}{dx} \left[\sqrt{x - \sqrt{x^2 - a^2}} \right] = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

gdzie > 0 gdy $\frac{x^2}{x^2 - a^2} > 1$

niezmienne!

Úloha prúžkiny s pružností elastická

62

$x=l$:

$$a \sin \alpha l + \frac{3\alpha^3 a^3 l}{16} \cos \alpha l + \frac{3\alpha^2 a^3}{64} \sin 3\alpha l = 0$$

$$\alpha^2 a^3 \left[\frac{1}{16} \cos \alpha l + \frac{1}{64} \sin 3\alpha l \right] = 0$$

musí být rovnice pro α splněna
a to tak rovnice rovnice

ještě 420

$$\alpha l = \frac{\pi}{2} = \delta$$

$$\sin \alpha l = \sin \delta = 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

$$\cos \alpha l = \cos \delta = \delta$$

$$\sin 3\alpha l = \sin \left(\frac{3\pi}{2} - 3\delta \right) = -\cos 3\delta = -1 + \frac{9\delta^2}{2}$$

$$1 - \frac{\delta^2}{2} - 1 + \frac{9\delta^2}{2} = 0$$

$$a \left(1 - \frac{\delta^2}{2} \right) + \frac{3\alpha^3 a^3 l}{16} \delta + \frac{3\alpha^2 a^3}{64} \left(-1 + \frac{9\delta^2}{2} \right) = 0$$

$$\sin \alpha l = \sin \delta = \delta$$

$$\cos \alpha l = -\cos \delta = -1 + \frac{\delta^2}{2}$$

$$\sin 3\alpha l = \sin (3\pi - 3\delta) = -\cos 3\delta$$

$$a \delta + \frac{3\alpha^3 a^3 l}{16} \left(-1 + \frac{\delta^2}{2} \right) + \frac{3\alpha^2 a^3}{64} 3\delta = 0$$

$$\delta = + \frac{3\alpha^3 a^2 l}{16}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EO}} = \frac{\pi}{l} - \frac{3\alpha^3 a^2}{16}$$

$$P = EO \left[\frac{\pi}{l} - \frac{3\alpha^3}{16} \right]$$

$$a^2 = \frac{16}{3\alpha^3} \left[\frac{\pi}{l} - \alpha \right]$$

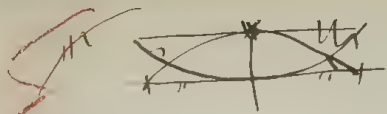
α má být rovné $\frac{\pi}{l}$

$$\text{tedy } a^2 \neq \frac{16}{3} \frac{l^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{\alpha l}{\pi} \right)$$

tedy pro P roste a musíme být opatrní! aby nastala rovnice

$$\delta = \frac{3}{16} \frac{a^2}{l^2} (\pi - \delta)^3 = \frac{3}{16} \frac{a^2}{l^2} (\pi^3 - 3\pi^2 \delta)$$

$$\delta \neq \frac{3}{16} \frac{a^2 \pi^3}{l^2} = \pi - l \sqrt{\frac{P}{EO}}$$



Tongue $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$ in

$$y = 2 \ln x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{3}{2} a^3 d^4 m^2 x \cos x + a^2 y = 0$$

$$= \frac{3}{8} a^3 \alpha^4 [\sin \alpha x - \cos 3\alpha x]$$

$$y = -\frac{3}{16} a^3 x^3 \times \sin \alpha x - \frac{3}{64} a^3 x^2 \cos 3\alpha x + a \cos \alpha x$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ dann für $y=0$ [1. & 2. punkte vor, ist in. nicht! 2. p. ist!]

$$a \sin \delta = \frac{3}{16} a^3 \alpha^2 \left[-\frac{\sin 3\delta}{4} + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \sin \delta \right]$$

$$\left[1 - \frac{\delta^2}{6}\right] \approx \frac{3}{16} \delta^2 \approx \left[\left(\frac{n}{2} - \delta\right) \left(1 - \frac{\delta^2}{6}\right) - \frac{1}{2} \left(3 - \frac{27}{6} \delta^2\right)\right]$$

$$1 = \frac{3}{16} a^2 x^2 \left[\frac{2}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}} \right]$$

$$\alpha = \frac{\pi}{l} + \varepsilon$$

$$\frac{3}{16} \frac{Q^2 R^2}{l^2} = \frac{\mu_0}{\epsilon} \frac{l}{R}$$

$$\varepsilon = -\frac{3}{16} \alpha \left(\frac{r}{l}\right)^3$$

$$\alpha x = \frac{\pi}{2} - \int$$

$$\alpha = \frac{2P}{P_0}$$

$$J = \frac{3}{16} a^2 \alpha^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha l = \frac{\pi}{180} \left[1 - \frac{2}{18} a^2 \alpha^2 \right]$$

$$\frac{3}{16} a^2 \alpha^2 = 1 - \frac{H_{\text{eff}}}{\alpha}$$

$$3 \times \frac{P}{r} = 1 - \frac{1}{r} \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$

$$l = \pi \sqrt{\frac{EJ}{P}} \left[1 - \frac{3}{16} \frac{a^2 P}{EJ} \right]$$

$$\alpha = \frac{2}{\ell} \left[1 - \frac{8}{16} \frac{a^2 R^2}{(\ell)^2} \right] = \sqrt{\frac{R}{\ell \theta}}$$

~~As per P. Am. magazine in which a~~

$$\frac{\lambda}{l} = a^2 \alpha^2 \left\{ \frac{3}{\pi b} \frac{E\theta (1 - \frac{\lambda}{e})}{E\theta - \rho \rho_{\alpha^2}^2} \left[1 + \frac{1}{\alpha^2 (E\theta - \rho \rho_{\alpha^2}^2)} \right] - \frac{81}{8} \frac{E\theta \frac{2}{e}}{72 E\theta - 8 \rho \rho_{\alpha^2}^2} \left[1 + \frac{91}{\alpha^2 (72 E\theta - 8 \rho \rho_{\alpha^2}^2)} \right] \right\}$$

$$p=0$$

$$\lambda=0$$

$$a = \frac{2}{3}$$

$$\lambda = \lambda_1 p + \lambda_2 p^2$$

$$a^2 = a_1^2 p + a_2^2 p^2$$

W naszym przypadku mamy dwie składowe: pot. en. i energia kinetyczna

65

$$\bar{V} = \int_0^l \rho g \frac{y^2}{2} dx$$

$U + V - W$ musi być minimalne

$$V = \frac{\rho g}{2} \int_0^l \left[\sin^2 \alpha x (a^2 + b_1^2) + \sum_{k=2}^{\infty} b_k^2 \sin^2 \frac{k\pi x}{l} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} b_k b_1 \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{\pi x}{l} \right] dx$$

$$= \frac{\rho g}{2} l \left[(a^2 + b_1^2) + \sum_{k=2}^{\infty} b_k^2 \right]$$

$$U + V - W = (a^2 + b_1^2) [E\theta \alpha^4 - P\alpha^2 + \rho g] + \sum b_k^2 [E\theta k^4 \alpha^4 - P\alpha^2 k^2 + \rho g]$$

minimum tychto żądać $E\theta \alpha^4 - P\alpha^2 + \rho g = 0$

$$(I) \quad P = \frac{E\theta \frac{\pi^4}{l^4} + \rho g}{\frac{\pi^2}{l^2}} = E\theta \frac{\pi^2}{l^2} + \rho g \frac{l^2}{\pi^2}$$

ale równocześnie wymagać $E\theta k^4 \alpha^4 - P\alpha^2 k^2 + \rho g > 0$

$$\text{czyli: } P < 4E\theta \frac{\pi^2}{l^2} + \rho g \frac{l^2}{4\pi^2}$$

czy to jest jednak konieczna wyznaczenia od poprzedniej?

$$\text{tylko w razie jeżeli } E\theta \frac{\pi^2}{l^2} > \rho g \frac{l^2}{\pi^2}$$

potwierdzeniem jest $m + \frac{b}{m} > a + b$?

$$(m-1)a > b(1 - \frac{1}{m}) = b \frac{m-1}{m}$$

$$\frac{l^4}{\pi^4} < \frac{4E\theta}{\rho g}$$

$$a > \frac{b}{m}$$

$$m = \frac{2}{3}$$

(II)

$$P > 2\sqrt{E\theta \rho g}$$

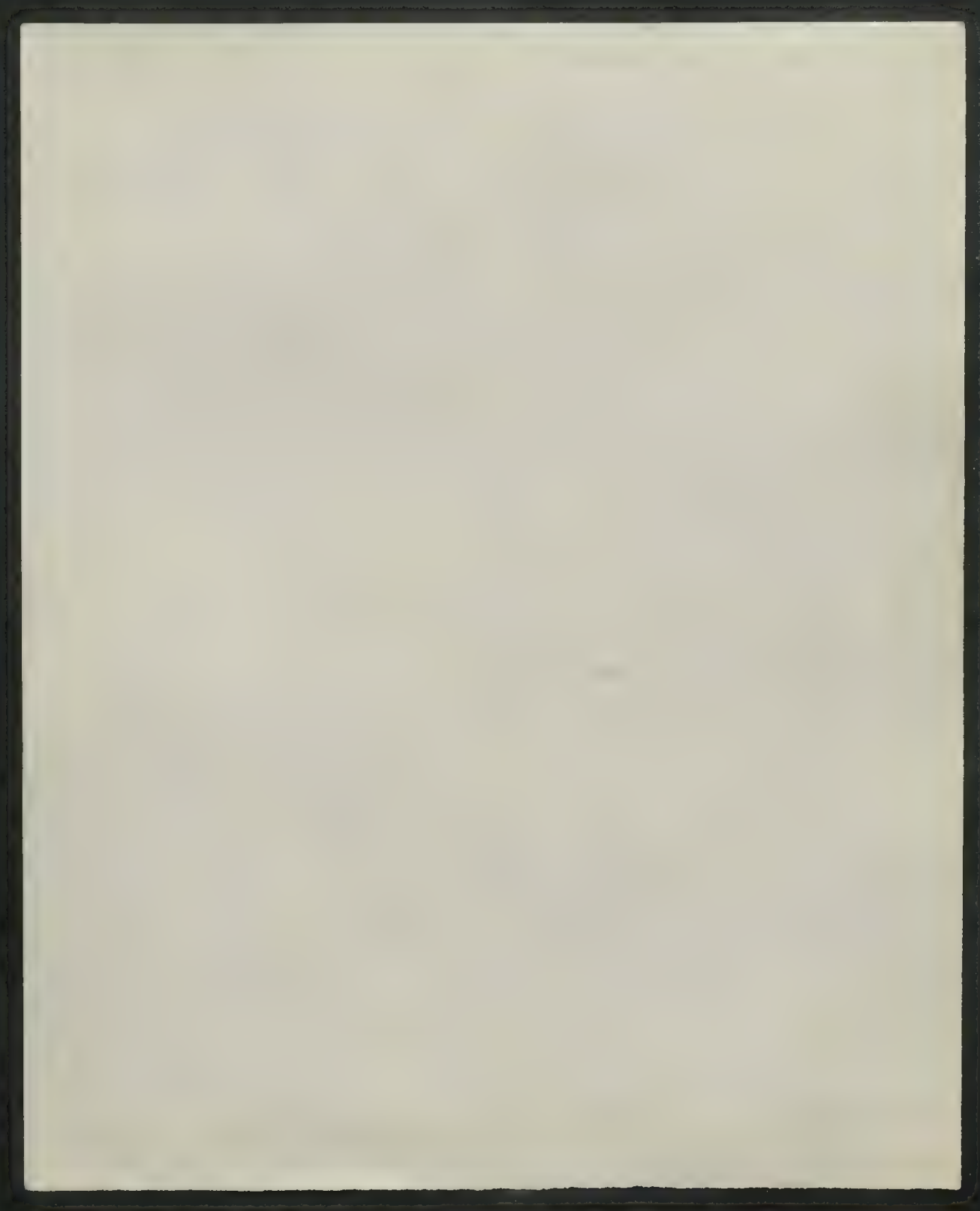
$$\rho g \frac{l^2}{\pi^2} < E\theta \frac{\pi^2}{l^2}$$

jeżeli zaś $a \geq b$

$$\text{to zawsze } 2\sqrt{ab} < a + b$$

czyli powyższy tyłko warunk (I), (II)

zatem zawsze jest spełniony warunek $P > 2\sqrt{E\theta \rho g}$



~~tytuł~~ $x + \frac{1}{x} \geq 2$

$x^2 + 1 \geq 2x$

$(x-1)^2 \geq 0$

~~tytuł~~ ~~rozważmy dla x > 0~~
rozważmy obie strony dla x > 0

Wskazujemy tytułowi warunki:

$$h^2(h-1)^2 \frac{\rho g}{E\theta} \frac{l^4}{n^4} < h^2(h+1)^2$$

oraz równanie $P = E\theta \frac{h^2 n^4}{l^2} + \rho g \frac{l^2}{h^2 n^4}$

Wtedy mamy $y = a \sin \frac{h n x}{l}$

$$y = y_0 + x \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 + \frac{x^2}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 + \frac{x^3}{3!} \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_0 + \frac{x^4}{4!} \left(\frac{d^4 y}{dx^4} \right)_0 + \dots$$

$$\left(\frac{d^5 y}{dx^5} \right)_0 = -\frac{P}{E\theta} \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_0 - \frac{\rho g}{E\theta} \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 = -\mu \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_0 - \nu \left(\frac{dy}{dx} \right)_0$$

$$D^5 = -\mu D^3 - \nu D = \mu^2 D^3 + \mu\nu D - \nu D^3 = (\mu^2 - \nu) D^3 + \mu\nu D$$

$$D^9 = -\mu D^7 - \nu D^5 = (\mu^3 + 2\mu\nu) D^3 - (\mu^2\nu - \nu^3) D$$

$$y = \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 \varphi(x) + \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_0 \psi(x)$$

$$\varphi'(x_0) = 1$$

$$\varphi'''(x_0) = 0$$

$$\varphi'(x_0) = 0$$

$$\varphi'''(x_0) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = a \cos ax + \frac{3a^3 a^3}{16} (\cos ax - ax \sin ax) + \frac{9a^3 a^3}{64} \cos 3ax$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = a + \frac{3}{4} a^3 a^3$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_L = a \left(-1 + \frac{L^2}{P}\right) + \frac{3a^3 a^3}{16} \left(-1 + \frac{L^2}{P} - aL\delta\right) + \frac{9a^3 a^3}{64} \left(1 - \frac{9L^2}{12}\right)$$

asymetria! ale symetria ujem!

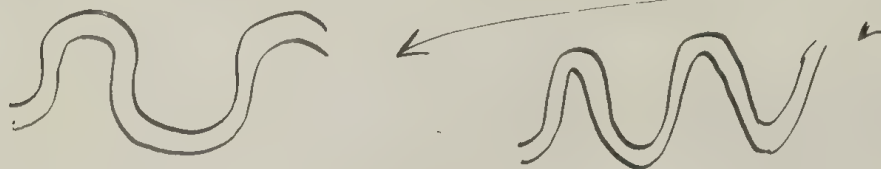
Wgł z ~~kt~~ polowa + tam i z ~~kt~~ w przeciwnym kierunku:

$$y = a \sin(ax + \varepsilon) + \frac{3a^3 a^3}{16} \cos(ax + \varepsilon) + \frac{3a^2 a^3}{64} \sin(3ax + 3\varepsilon)$$

Wgł dla $x=0$:

$$y = a \sin \varepsilon + \frac{3a^2 a^3}{64} \sin 3\varepsilon = 0 \quad \text{wynika } \varepsilon=0$$

Najstabilni punkty wierzchołki; typie zatem ten najniższy góllowy punkt i najniższe
relaksacja; dla tego ~~z~~ 2 relaksacji nie porównujemy kształt elastica leżą:



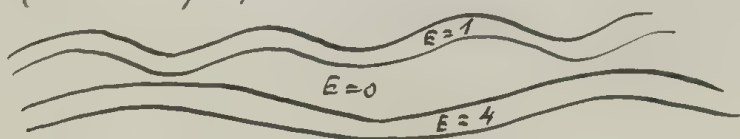
o precyzyjnym pomiarze wysokości szczytów.



Wzrost mikrocząstek E w kierunku wzrostu?
(do mikrocząstek)

o dalszym ciągu? albo zupełnie
złamanie

N.p.



o dalszym ciągu:



złamanie, „fingerformige Ausläufer“?

Próbni skompy h tem výřezem sem výřezem šitý!



$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0 \quad \left\| \quad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0\right.$$

$$\rho g + \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad \left\| \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial (V_y + \rho g y)}{\partial y} = 0\right.$$

$$X_x = \frac{\partial \chi}{\partial y^2}; \quad V_y = \frac{\partial \chi}{\partial x^2} - \rho g y + f(x); \quad X_y = -\frac{\partial \chi}{\partial x \partial y}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = (2\mu + \lambda) e_{xx} + \lambda e_{yy} \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \rho g y + f(x) &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = (2\mu + \lambda) e_{xx} + \lambda e_{yy} \\ -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} &= \mu e_{xy} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ e_{xy} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ e_{yy} &= \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

$$+ 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} =$$

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}$$

$$(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \lambda \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

$$(2\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} \right) + \lambda \left(\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x^2} \right) - 2\mu \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \lambda \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} (e_{xx} + e_{yy})$$

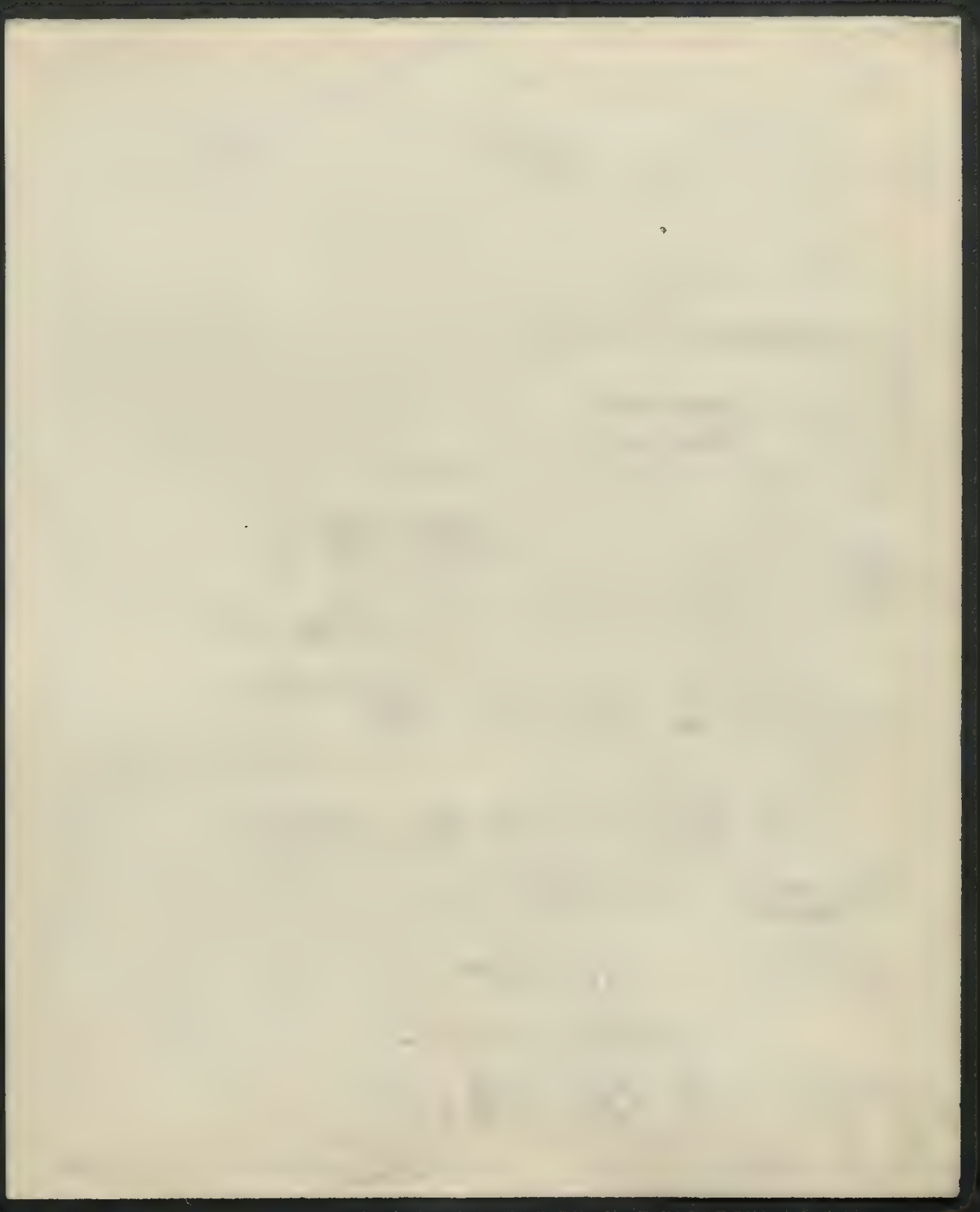
$$e_{xx} [(2\mu + \lambda) - \lambda] = (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \lambda \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \rho g y + f(x) \right)$$

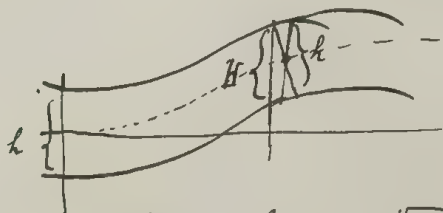
$$e_{yy} [\quad] = (2\mu + \lambda) \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \rho g y + f(x) \right] - \lambda \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}$$

$$(2\mu + \lambda) \left[\frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} \right] - \lambda \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

$$4\mu^2 + 2\mu\lambda$$





Już: kiedy belka z rozbicia rozprężamy:
głębokość mi zmieniać, ale rozmiar
w kierunku pionowym zmieniać

W pionowym przyśrodku: $H = \frac{h}{\cos \varphi} = h \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = h \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$

zatem powtórzyć tam V_y gdzie $\frac{dy}{dx} \geq 0$, dźwign do zmieniać głębokości h w ogólnie nie jest

Przebiegiem [już nie przypuszczamy że $\xi = 0$ dla bryły kształtu] linia i wstawia wartość wyliczoną

w stosunku $ds = \frac{d\xi}{\cos \varphi} = d\xi \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$, co wywołuje skurczenie w kierunku

poprzecznym $h' = h \left(1 - \frac{\mu}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$

Wskazując zatem już mi może powstać pytanie ile V_y, X_x , to potencjały aby tam gdzie $\left(\frac{dy}{dx}\right) \geq 0$
belka w kierunku X nie wychylała. $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1-\mu}{2\mu} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$?

$$\frac{1}{2} (1-\mu) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \mu \frac{d\xi}{dx}$$

Jużi już że wartość maleje po prostu, smutna ta tendencja. Pojście dźwigni lub kątowego
dźwigni do uśredniania

Razem z uśrednieniem gdzie $\frac{dy}{dx} = 0$ nastąpiłoby skurczenie w kierunku X

Stądże przemysł i ~~stąd~~ punktowi wartości $ds \neq h \frac{dy}{dx}$

Co skąd to warunek przejścia ze stanu jednowymiarowego zginanego φ w stan spłaskowany?

(W każdym razie spłaskowanie jest łagodnie przesłane?)

$$\chi_x = 2T \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + L \theta \right]$$

$$\chi_y = T \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

$$Z_2 =$$

$$Z_x =$$

$$\mathcal{E}_{xx} = 2\mu \epsilon_{xx} + \lambda \Delta$$

$$= \mu \epsilon_{xx}$$

$$\frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \frac{\partial \chi_z}{\partial z} = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial \chi_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial \chi_y}{\partial y}} + \frac{\partial \chi_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \chi_z}{\partial x} + \frac{\partial \chi_z}{\partial y} + \frac{\partial \chi_z}{\partial z} = 0$$

$$\mu \left(\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} + 2 \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial z} + (\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0$$

Dist (cylindrical) plate p. 130 terminal couple: $M = -\frac{2}{3} \frac{E h^3}{1.6^2} \frac{1}{R}$

Wznie $P > 2\sqrt{E\theta\rho g}$:

$$\alpha\beta = \sqrt{\frac{P}{2E\theta}} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\rho g E\theta}{P^2}} \right]$$

20

$$y = A \sin(\alpha x + \varepsilon) + B \sin(\beta x + \delta)$$

$$x=0: \left\{ \begin{array}{l} y=0 \\ \frac{dy}{dx}=0 \end{array} \right\} \quad x=l$$



$$\left\{ \begin{array}{l} A \sin \varepsilon + B \sin \delta = 0 \\ A \alpha^2 \sin \varepsilon + B \beta^2 \sin \delta = 0 \end{array} \right.$$

$$A \sin(\alpha l + \varepsilon) + B \sin(\beta l + \delta) = 0$$

$$A \alpha^2 \sin(\alpha l + \varepsilon) + B \beta^2 \sin(\beta l + \delta) = 0$$

$$\text{N.p. } \begin{array}{ll} B=0 & \text{ albo } A=0 \\ \varepsilon=0 & \delta=0 \end{array}$$

możliwe tylko jeżeli: $\sin(\alpha l) = 0$
wtedy: $\alpha l = k\pi$

wzrosty wszystkich sinusoidal

Wzrost ρg będzie podobnie, tylko że: $\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$, w dla bardzo dużych P jedna z pierwiastków
stała się α (wzrost) stała się β (stała się) (stała się!)

To znaczy że tylko pewne wartości P są dopuszczalne przy danym l .

P mi możemy ~~zobaczyć~~ wartości α i β z tego.

opisuje je α i β w zależności od β ! Wtedy wznie superpozycję

$$\alpha = n\beta$$

$$y = B \sin \beta x + A \sin n\beta x$$

Proba: czy symetryczne?

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 &= \alpha\alpha + \frac{3a^3\alpha^5 E\theta}{16[2\alpha^2 E\theta - P]} + \frac{81}{8} \frac{\alpha^3\alpha^7 E\theta}{81\alpha^4 E\theta - 9\alpha^2 P + 9g} \\
 &= \alpha\alpha + \frac{3}{16} a^3\alpha^5 E\theta \left[\frac{40\alpha^2 E\theta - 4P + 54\alpha^2 E\theta - 27P}{(2\alpha^2 E\theta - P)(10\alpha^2 E\theta - P)} \right] \\
 &= \frac{81}{64} \frac{a^3\alpha^5 E\theta}{[10\alpha^2 E\theta - P]}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 \cos \alpha x) = 2x \cos \alpha x - \alpha x^2 \sin \alpha x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\quad) = 2 \cos \alpha x - 4 \alpha x \sin \alpha x - \alpha^2 x^2 \cos \alpha x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha^2 y + k \sin \alpha x$$

$$y = m x^2 + n x + p$$

$$m[2 \cos \alpha x - 4 \alpha x \sin \alpha x - \alpha^2 x^2 \cos \alpha x]$$

$$+ n[-2 \alpha \sin \alpha x - \alpha^2 x \cos \alpha x]$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 \sin \alpha x) = 2x \sin \alpha x + \alpha x^2 \cos \alpha x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\quad) = 2 \sin \alpha x + 4 \alpha x \cos \alpha x - \alpha^2 x^2 \sin \alpha x$$

$$m[2 \sin \alpha x + 4 \alpha x \cos \alpha x - \alpha^2 x^2 \sin \alpha x]$$

$$+ n[-2 \alpha \cos \alpha x - \alpha^2 x \sin \alpha x]$$

$$= -\alpha^2 \{ m x^2 \sin \alpha x + n x \cos \alpha x \} + k \sin \alpha x$$

$$m=0 \quad k=2\alpha n \quad \left(\frac{dy}{dx} = -\alpha^2 y + k \sin \alpha x \right)$$

$$y = \frac{k}{2\alpha} \xi \sin \alpha \xi + b \cos(\alpha \xi + \epsilon)$$

$$= \frac{k}{2\alpha} \left(\frac{\pi}{2\alpha} - x \right) \sin \alpha x + b \cos \alpha x$$

$$y = a \sin(\alpha x + \epsilon) + \frac{3\alpha^3 a^3}{16} \left(x - \frac{\pi}{2\alpha} \right) \cos \alpha x + \frac{3\alpha^2 a^3}{64} \sin 3\alpha x$$

$$2\alpha x \cos \alpha x = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha^2} \cos \alpha x \right) - \frac{1}{\alpha^2} \sin \alpha x$$

$$E0 \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) \frac{dy}{ds} \right] + \frac{1}{R} \frac{dy}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dy}{ds} = 0$$

$$y^2 = -\left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R}$$

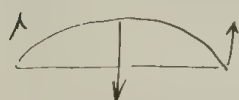
$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{1 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2}{R} \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1 + \frac{1}{R^2}}{R} \right]^{1/2} = \frac{1}{R \cos \theta}$$

Spór o poprawkę równania ról jest odpowiedni w całej mechanice z wyjątkiem ~~przypadku~~ punktu $y=0$

Tam poprawione ról, ról. traci swoją wartość: trzeba wrócić do formy klasycznej (jako jest!)



z powodu symetrii w każdym ról tam gdzie $y=0$ musi być $\frac{dy}{dx} = 0$

Ala czy istotnie jest symetria?

Wzrosty wykazywa: $\dot{a}^2 a^2 = \frac{16}{3} \left(1 - \frac{\alpha l}{4n}\right)$

$$l = \frac{4n}{\alpha} - \frac{3\alpha^2 a^2 n}{16}$$

$$y = a \sin \alpha x + \frac{3\alpha^2 a^3}{16} x \cos \alpha x + \frac{3\alpha^2 a^3}{64} \sin 3\alpha x$$

$$\text{bierz } x = \frac{l}{2} + \xi$$

$$\alpha x = \frac{\alpha n}{2} - \frac{3\alpha^2 a^2 n}{32} + \alpha \xi$$

$$y = a \cos \left(\frac{3\alpha^2 a^2}{32} - \alpha \xi \right) + \frac{3\alpha^2 a^3}{16} \left[\frac{n}{2\alpha} - \frac{3\alpha a^2}{32} + \frac{\xi}{2} \right] \sin \left(\frac{3\alpha^2}{32} - \alpha \xi \right) - \frac{3\alpha^2 a^3}{64} \sin \left(\frac{9\alpha^2}{32} - 3\alpha \xi \right)$$

$$= a \left(\cos \alpha \xi + \frac{3\alpha^2 a^2}{32} \sin \alpha \xi \right) + \frac{3\alpha^2 a^3}{32} (n + 2\alpha \xi) \sin \alpha \xi + \frac{9}{64} \alpha^2 a^3 \sin 3\alpha \xi$$

$$= a \cos \xi + \frac{9}{64} \alpha^2 a^3 \left[\sin 3\alpha \xi - \frac{3}{4} \xi \sin \alpha \xi \right]$$

asymetria!

Takie pęty więcej dłużej, nigdy więcej niż $3\alpha \xi$ -- ξ i $\alpha \xi$ nie może się zerować!

Wzrost problemu:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{2} \alpha^2 a^4 \sin \alpha x \cos \alpha x = -\alpha^2 y$$

$$= \frac{3\alpha^2 a^4}{8} [\sin \alpha x + \sin 3\alpha x]$$

✓

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{P}{E\theta} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\rho g}{E\theta} y = 0$$

$\int y dx = 0$ jeżeli punkt ciężkości nie jest podparty
 a zatem $y = y_0 e^{-\alpha x}$ 72

$$y'''' + m^2 y'' + n^4 y = 0$$

$$y = A e^{\alpha x}$$

$$\alpha = \pm \sqrt{-\frac{m^2}{2} \pm \sqrt{\frac{m^4}{4} - n^4}} = \pm \sqrt{\frac{m^2}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4n^4}{m^2}}\right)} = \pm \sqrt{\frac{P}{2E\theta} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho g E\theta}{P^2}}\right]}$$

w razie jeżeli $P^2 < 4\rho g E\theta$?

w razie jeżeli $P^2 > 4\rho g E\theta$

$$\alpha = \pm i \sqrt{\frac{P}{2E\theta} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho g E\theta}{P^2}}\right]}$$

które tylko sinusoidalne dla młodych θ :
 $y = y_0 \sin x \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$

$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{AE\theta}{P}}$
 zwykła Eulerowa

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{P}{2E\theta} \left[-1 \pm i \sqrt{\frac{4\rho g E\theta}{P^2} - 1}\right]}$$

$$\sqrt{x+iy} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}} = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \sqrt{x^2+y^2} \left[\cos \frac{\arctan \frac{y}{x}}{2} + i \sin \frac{\arctan \frac{y}{x}}{2}\right]$$

$$\sqrt{-x+iy} = \sqrt{r} \sqrt{(-\cos \theta + i \sin \theta)} = \sqrt{r} \sqrt{e^{i(\pi-\theta)}} = \sqrt{r} \left(\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sqrt{-x-iy} = \sqrt{r} \sqrt{(-\cos \theta - i \sin \theta)} = \sqrt{r} \sqrt{e^{i(\pi+\theta)}} = \sqrt{r} \left(-\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{P}{2E\theta}} \cdot \sqrt{\frac{4\rho g E\theta}{P^2}} \left[\pm \sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2}\right]$$

$$= \pm \sqrt{\frac{P}{2E\theta}} \sqrt{\frac{4\rho g E\theta}{P^2}} \left[\pm \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{P^2}{4\rho g E\theta}}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{P^2}{4\rho g E\theta}}}{2}}\right]$$

Do niniejszych danych P przyjęliśmy:

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{\rho g}{2E\theta}} \left[\pm 1 + i\right] = \pm \sqrt{\frac{\rho g}{E\theta}} \pm i \sqrt{\frac{\rho g}{E\theta}}$$

$$P_{max} = 2 \cdot 10^{15}$$

$$\rho = 3$$

$$g = 10^3$$

$$\theta = \frac{L^2}{12} = \frac{10^8}{12}$$

$$E = 5 \cdot 10^{11}$$

$$4\rho g E\theta = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{11} \cdot 10^8}{12}$$

$$= 5 \cdot 10^{32}$$

zatem $P^2 \ll 4\rho g E\theta$

zatem $\lambda \approx 10^6$

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{4\rho g E\theta}{P^2} - 1}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\rho g E\theta}{P^2}}} = \sqrt{\frac{P^2}{4\rho g E\theta}}$$

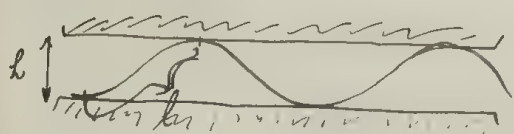
$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\rho g}}$$

$$\approx \sqrt{\frac{15}{\rho g}}$$

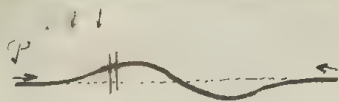
$$y = y_0 e^{-\alpha x} \sin(x \sqrt{\frac{\rho g}{E\theta}} + \epsilon)$$

$$= 6 \sqrt{\frac{2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3}} \approx 5.5 \text{ cm}$$

Two parallel electric wires carrying equal currents I and $2I$



$$l = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha l}{4}\right)^2 \sin^2 \phi}} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}}$$



$$M = \frac{E\theta}{R}$$

to samo mi by bylo v rovnováze
mechaniky! třeba konstantní
přímé dodací souvislosti
sily, aby každá část
vážila, která způsobuje
dodákový moment

$$Py + \rho g \int_0^x y d\xi = \frac{E\theta}{R} \neq -E\theta \frac{dy}{dx}$$

$$P \frac{dy}{dx} + \rho g y x + \rho g \int_0^x y d\xi = -E\theta \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$P \frac{dy}{dx} + \rho g \left(x \frac{dy}{dx} + y \right) + \rho$$

$$P \frac{dy}{dx} + \rho g \int_0^x y d\xi + \frac{-F}{A} = +E\theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right)$$

$$P \frac{dy}{dx} + \rho g y = +E\theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) \neq -E\theta \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$y = A e^{\alpha x}$$

$$E\theta \alpha^4 + P\alpha^2 + \rho g = 0$$

$$\alpha^4 + \frac{P}{E\theta} \alpha^2 + \frac{\rho g}{E\theta} = 0$$

$$\alpha = \pm \sqrt{-\frac{P}{2E\theta} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4E^2\theta^2} - \frac{\rho g}{E\theta}}} = \pm i \sqrt{\frac{P}{2E\theta} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\rho g E\theta}{P^2}} \right]}$$

$$\sqrt{\alpha \pm i\beta} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (\cos \frac{\varphi}{2} \pm i \sin \frac{\varphi}{2})$$

$$\varphi = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$$

$$= \pm i \sqrt{\frac{P}{2E\theta} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\rho g E\theta}{P^2}} \right]}$$

$$R(\cos \frac{\varphi}{2} \pm i \sin \frac{\varphi}{2})$$

$$= \pm (\mu + i\nu)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{P}{2E\theta} \left[\frac{4\rho g E\theta}{P^2} \right]} \cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{2\rho g}{P}} \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{4\rho g E\theta}{P^2} - 1}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{P}{2E\theta} \left[\frac{4\rho g E\theta}{P^2} \right]} \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{2\rho g}{P}} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\varphi}{2} &= \frac{1 + \cos \varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} &= \frac{1 - \cos \varphi}{2} \end{aligned} \right\} = \sqrt{\frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\rho g E\theta}{P^2}}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\rho g E\theta}{P^2}}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 \pm \frac{P}{2\sqrt{\rho g E\theta}}}{2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \mu^2 - \nu^2 &= -\frac{P}{2D} \\ 2\mu\nu &= \pm \sqrt{\frac{\rho g}{D} - \frac{P^2}{4D^2}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mu^2 - 2\nu^2 + \nu^2 &= \frac{P^2}{4D^2} \\ \nu^2 - \mu^2 &= \frac{\rho g}{D} - \frac{P^2}{4D^2} \end{aligned}$$

$$\mu^2 + \nu^2 = \pm \sqrt{\frac{\rho g}{D}}$$

$$\mu^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{P}{2D} + \sqrt{\frac{\rho g}{D}} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \mu [A e^{\mu x} \sin(\nu x + \varepsilon_1) - B e^{-\mu x} \sin(\nu x + \varepsilon_2)] \\ + \nu [A e^{\mu x} \cos(\nu x + \varepsilon_1) + B e^{-\mu x} \cos(\nu x + \varepsilon_2)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \mu^2 [A e^{\mu x} \sin(\nu x + \varepsilon_1) + B e^{-\mu x} \sin(\nu x + \varepsilon_2)] + \nu^2 [A e^{\mu x} \sin(\nu x + \varepsilon_1) + B e^{-\mu x} \sin(\nu x + \varepsilon_2)] \\ + 2\mu\nu [A e^{\mu x} \cos(\nu x + \varepsilon_1) - B e^{-\mu x} \cos(\nu x + \varepsilon_2)]$$

$$A \sin \varepsilon_1 + B \sin \varepsilon_2 = 0$$

$$\mu (A \sin \varepsilon_1 - B \sin \varepsilon_2) + \nu (A \cos \varepsilon_1 + B \cos \varepsilon_2) = 0$$

$$\mu^2 (\cancel{A \sin \varepsilon_1} + \cancel{B \sin \varepsilon_2}) + 2\mu\nu (A \cos \varepsilon_1 - B \cos \varepsilon_2) - \nu^2 (\cancel{A \sin \varepsilon_1} + \cancel{B \sin \varepsilon_2}) = 0$$

$$A \sin \varepsilon_1 = -B \sin \varepsilon_2$$

$$A \cos \varepsilon_1 = B \cos \varepsilon_2$$

$$\left. \begin{aligned} A \sin \varepsilon_1 &= -B \sin \varepsilon_2 \\ A \cos \varepsilon_1 &= B \cos \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \tan \varepsilon_1 = -\tan \varepsilon_2$$

$$A^2 = B^2$$

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$$

$$\text{also } \varepsilon_1 = \pi - \varepsilon_2$$

in phase case:

$$A = B$$

in phase case

$$A = -B$$

phase

case:

in phase case:

$$\mu A \sin \varepsilon_1 + \nu A \cos \varepsilon_1 = 0$$

$$\mu A \sin \varepsilon_1 = -\nu A \cos \varepsilon_1$$

$$\tan \varepsilon_1 = -\frac{\nu}{\mu}$$

$$e^{\mu l} = -\frac{\sin(\nu l + \varepsilon_1)}{\sin(\nu l + \varepsilon_2)} = \frac{\sin(\nu l + \varepsilon_2)}{\sin(\nu l + \varepsilon_1)}$$

$$-\tan(\nu l + \varepsilon_1) = \tan(\nu l + \varepsilon_2)$$

$$\nu l + \varepsilon_2 = \pi - \nu l + \varepsilon_1$$

$$2\nu l = \pi - \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$l = \frac{\pi - \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\nu}$$

$$e^{\mu l} = (-1)^k$$

incompatible!

$$y = A [e^{\mu x} \sin(\nu x + \varepsilon) + e^{-\mu x} \sin(\nu x - \varepsilon)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \mu A [e^{\mu x} \sin(\nu x + \varepsilon) + e^{-\mu x} \sin(\nu x - \varepsilon)] + \nu A [e^{\mu x} \cos(\nu x + \varepsilon) - e^{-\mu x} \cos(\nu x - \varepsilon)]$$

$$l=0: e^{\mu l} \sin(\nu l + \varepsilon) + e^{-\mu l} \sin(\nu l - \varepsilon) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \mu A [e^{\mu l} \sin(\nu l + \varepsilon) + e^{-\mu l} \sin(\nu l - \varepsilon)] + 2\mu\nu A [e^{\mu l} \cos(\varepsilon) - e^{-\mu l} \cos(\varepsilon)] = 0$$



$x=0: y=0$

$x=\infty: y=0$

$A_1 = A_2 = 0$

$E\theta \frac{dy}{dx} = M_0$

$\frac{dy}{dx} = 0$

~~$\frac{dy}{dx} = \dots$~~

$\theta_1 = 0$

$y = B e^{-\gamma x} \sin \beta x$

$\frac{dy}{dx} = B e^{-\gamma x} [-\gamma \sin \beta x + \beta \cos \beta x]$

$\frac{dy}{dx} = B e^{-\gamma x} [\gamma^2 \sin \beta x - \beta \gamma \cos \beta x - \beta^2 \sin \beta x]$

$M_0 = -E\theta B 2\gamma\beta$

$x=\infty: y=0 \} \rightarrow y = [O_1 \cos \beta x + O_2 \sin \beta x] e^{-\gamma x}$

$x=0: y=y_0$

~~$\frac{dy}{dx} = 0$~~

$-\gamma O_1 + \beta O_2 = 0$

$y = \cos \beta x + \frac{\gamma}{\beta} \sin \beta x e^{-\gamma x}$

$\frac{dy}{dx} = y_0 \left\{ -2\gamma\beta \frac{\gamma}{\beta^2} + \gamma^2 + \beta^2 \right\}$
 $= -y_0 \underbrace{(\gamma^2 + \beta^2)}_{\frac{E\theta}{2I}}$

$2\gamma < |\beta|$

$\cos \xi = y_0$

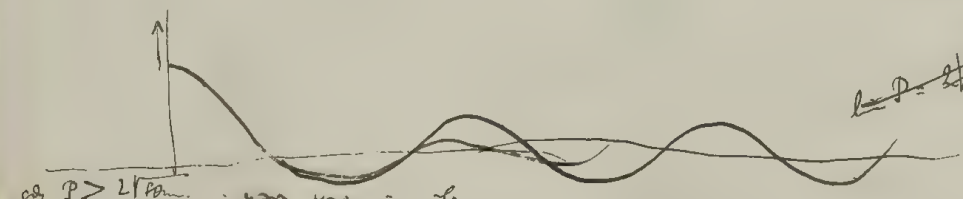
$\lim P=0$

$B (\mu^2 \sin \xi - \gamma \mu \cos \xi - \gamma^2 \sin \xi) = \frac{M_0}{D}$

$= y_0 [(\mu^2 - \gamma^2) - 2\gamma \mu \cot \xi]$

$\cot \xi = \frac{\mu^2 - \gamma^2}{2\gamma \mu} = \frac{M_0}{D y_0}$

$P = 2E\theta \gamma$
 $y = y_0 e^{-\gamma x} [\cos \beta x + \sin \beta x]$



for $P > 2E\theta \gamma$: $x \rightarrow \infty$ $y=0$ is not true
 $y = A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x$

W rozin rury ukladaj:

$$y = A_1 e^{\beta \varphi} + B_1 e^{-\beta \varphi} \quad \text{niezmienne dopóki } P < 2\sqrt{\epsilon_0 \rho g}$$

gdz $P > 2\sqrt{\dots}$ wtedy:

$$y = A_2 \cos(\alpha_2 \varphi + \epsilon_2) + B \cos(\beta \varphi + \delta)$$

$$\text{dla } \varphi = 0 \quad \frac{dy}{d\varphi} = 0 \quad (\text{minima}) \quad A \alpha \sin \epsilon + B \beta \sin \delta = 0$$

2 powody powstają:

$$A \cos(\alpha \varphi + \epsilon + 2n\alpha n) + B \cos(\beta \varphi + \delta + 2n\beta n) = A \cos(\alpha \varphi + \epsilon) + B \cos(\beta \varphi + \delta)$$

Alternatywa!

$$\text{Jedyną możliwą przypadkiem: } P = 2\sqrt{\epsilon_0 \rho g}$$

$$[\sqrt{\epsilon_0} \alpha^2 + \sqrt{\rho g}]^2 = 0$$

$$\alpha^2 = \mp \sqrt{\frac{\rho g}{\epsilon_0}}$$

$$\alpha = \pm i \sqrt{\frac{\rho g}{\epsilon_0}}$$

$$y = A \cos(\beta \varphi + \epsilon) + \left. \begin{aligned} &+ C e^{\beta \varphi} + D e^{-\beta \varphi} \end{aligned} \right\} \beta = \sqrt{\frac{\rho g}{\epsilon_0}}$$

$$A [\underbrace{\cos(\alpha \varphi + \epsilon + 2n\alpha n) - \cos(\alpha \varphi + \epsilon)}_{=0}] + B [\dots] = 0$$

$$-2 \sin(\alpha \varphi + \epsilon + n\alpha n) \sin n\alpha n$$

$$y = e^{(\mu_1 + i\nu_1)x} \quad e^{-\mu_1 + i\nu_1 x}$$

$$e^{(\mu_2 + i\nu_2)x} \quad e^{-\mu_2 + i\nu_2 x}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{P_2}{P} - 1} \sqrt{\frac{P_2}{4E\theta}}$$

$$y = e^{jx} \cos \beta x = \frac{1}{2} [e^{(j+\beta)x} + e^{(j-\beta)x}]$$

$$e^{jx} \cos \beta x$$

$$y' = e^{jx} (j \cos \beta x - \beta \sin \beta x)$$

$$y'' = e^{jx} (j^2 \cos \beta x - 2j\beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x)$$

$$y''' = e^{jx} (j^3 \cos \beta x - 3j\beta^2 \sin \beta x - 3j\beta^2 \cos \beta x + \beta^3 \sin \beta x)$$

$$\frac{1}{2} [(j+\beta)^4 e^{(j+\beta)x} + (j-\beta)^4 e^{(j-\beta)x}]$$

$$y'''' = e^{jx} (j^4 \cos \beta x - 4j^3 \beta \sin \beta x - 6j\beta^2 \cos \beta x + 4j\beta^3 \sin \beta x + \beta^4 \cos \beta x)$$

$$\left. \begin{aligned} E\theta(j^4 - 6j\beta^2 + \beta^4) + P(j^2 - \beta^2) + P_2 &= 0 \\ E\theta[-4j\beta^3 + 4j\beta^3] + P(2j\beta) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$j^4 - 6j\beta^2 + \beta^4 = 0$$

$$2(j^2 - \beta^2) + \frac{P}{E\theta} = 0$$

$$\beta^2 = j^2 + \frac{P}{2E\theta}$$

$$E\theta[j^4 - 6j^2(j^2 + \frac{P}{2E\theta}) + j^4 + \frac{P}{E\theta}j^2 + \frac{P^2}{4E\theta}] - \frac{P^2}{2E\theta} + \frac{P_2}{E\theta} = 0$$

$$-4j^4 - 2\frac{P}{E\theta}j^2 + \frac{P^2}{4E\theta} + \frac{P_2}{E\theta} = 0$$

$$j^4 + \frac{P}{2E\theta}j^2 = \frac{P_2}{4E\theta} - \frac{P^2}{16E\theta} \rightarrow [j^2 + \frac{P}{4E\theta}]^2 = \frac{P_2}{4E\theta}$$

$$j^2 + \frac{P}{4E\theta} = \pm \sqrt{\frac{P_2}{4E\theta}}$$

$$j^2 = -\frac{P}{4E\theta}$$

$$j = \pm \sqrt{\frac{-P}{4E\theta} + \sqrt{\frac{P_2}{4E\theta}}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{P}{4E\theta} \pm \sqrt{\frac{P_2}{4E\theta}}}$$

(modulus takes plus)

$$\frac{P}{4E\theta} < \sqrt{\frac{P_2}{4E\theta}}$$

$$\frac{P^2}{4E\theta} < P_2$$

$$P < \sqrt{E\theta P_2}$$

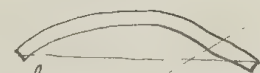
$$y = [A_1 e^{j_1 x} + B_1 e^{-j_1 x}] \cos \beta_1 x + [A_2 e^{j_2 x} + B_2 e^{-j_2 x}] \sin \beta_2 x$$

for $P=0$: $j=\beta = \sqrt[4]{\frac{P_2}{E\theta \cdot 4}}$

Główny moment

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=l \end{array} \right\} \begin{array}{l} y=0 \\ \frac{dy}{dx}=0 \end{array}$$

~~$y = a \sin \alpha x$~~



$$\int_0^l a \sin \frac{\alpha x}{l} (l-x) dx = a \frac{l^2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \sin \varphi (n-\varphi) d\varphi$$

$$\stackrel{n}{\equiv} \int_0^{\pi} \sin \varphi \cdot \varphi d\varphi$$

$$= -\varphi \cos \varphi - \sin \varphi = \pi$$

$$= a \frac{l^2}{\pi}$$

2 momenta zginowe. wynika z tego f.d.c. of prędkości p'inyj że przez $y=0$

~~$\frac{d^2 y}{dx^2}$ musi być < 0~~

musi być asymetryczna!

Myślenie in kółko!



$$x=0$$

$$y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=0$$

$$A_1 + 0_1 = 0$$

$$y_1(A_1 - 0_1) + \beta_1(A_2 + \beta_2) = 0$$

$$\beta_1 = -A_1$$

$$A_2 + 0_2 = -\frac{2y_1}{\beta_1} A_1$$

$$= \cancel{\beta_1(A_1 e^{y_1 x} - 0_1 e^{-y_1 x}) \cos \beta_1 x} - \cancel{\beta_1(A_2 + 0_2)} +$$

$$y = \cancel{M e^{y_1 x} \sin(\beta_1 x + \epsilon)} + \cancel{N e^{-y_1 x} \sin(\beta_1 x + \delta)} \quad (A_2 + 0_2) e^{y_1 x} + 0_2 (e^{-y_1 x} - e^{y_1 x})$$

$$y = A_1 [e^{y_1 x} - e^{-y_1 x}] \cos \beta_1 x - \frac{2y_1}{\beta_1} A_1 e^{y_1 x} \sin \beta_1 x + A_2 (e^{y_1 x} - e^{-y_1 x}) \sin \beta_1 x$$

$$+ [A_2 e^{y_1 x} + (A_2 + \frac{2y_1}{\beta_1} A_1) e^{-y_1 x}] \sin \beta_1 x$$

$$y' = y' \left\{ A_1 [e^{y_1 x} + e^{-y_1 x}] \cos \beta_1 x + [A_2 e^{y_1 x} + (A_2 + \frac{2y_1}{\beta_1} A_1) e^{-y_1 x}] \sin \beta_1 x \right\}$$

$$+ \beta_1 \left\{ -A_1 [e^{y_1 x} + e^{-y_1 x}] \sin \beta_1 x + [A_2 e^{y_1 x} - (A_2 + \frac{2y_1}{\beta_1} A_1) e^{-y_1 x}] \cos \beta_1 x \right\}$$

$$\tan \beta_1 l = - \frac{A_1 (e^{y_1 l} - e^{-y_1 l})}{A_2 e^{y_1 l} - (A_2 + \frac{2y_1}{\beta_1} A_1) e^{-y_1 l}}$$

$$\left\{ y_1 A_1 (e^{y_1 l} + e^{-y_1 l}) + \beta_1 [A_2 e^{y_1 l} - (A_2 + \frac{2y_1}{\beta_1} A_1) e^{-y_1 l}] \right\} \left\{ A_2 e^{y_1 l} - (A_2 + \frac{2y_1}{\beta_1} A_1) e^{-y_1 l} \right\} +$$

$$- \left\{ [A_2 e^{y_1 l} + (A_2 + \frac{2y_1}{\beta_1} A_1) e^{-y_1 l}] + \beta_1 A_1 [e^{y_1 l} + e^{-y_1 l}] \right\} \left\{ e^{y_1 l} - e^{-y_1 l} \right\} = 0$$

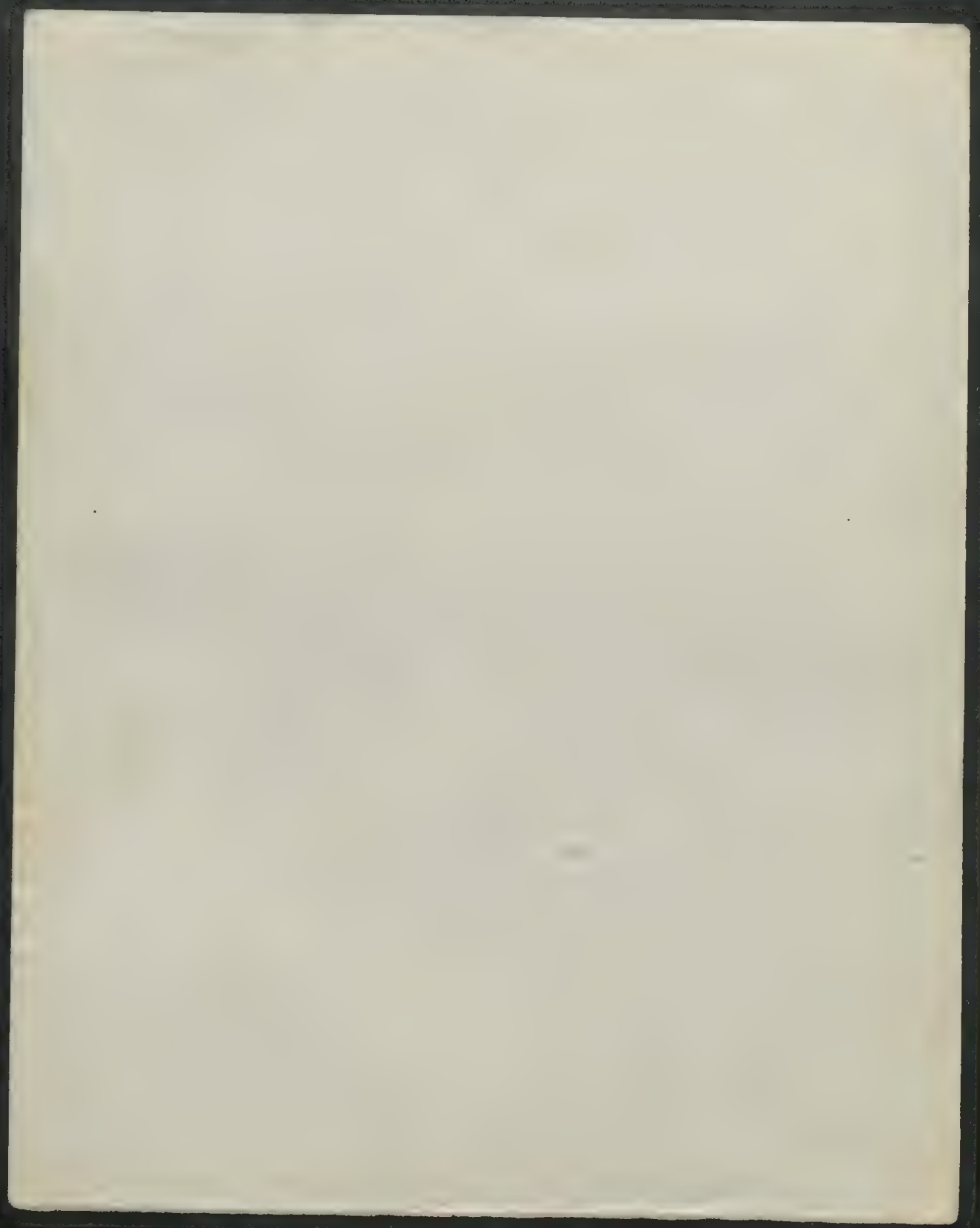
$$\left\{ (y_1 A_1 + \beta_1 A_2) e^{y_1 l} + (y_1 A_1 - \beta_1 A_2) e^{-y_1 l} \right\} \left\{ A_2 e^{y_1 l} - (A_2 + \frac{2y_1}{\beta_1} A_1) e^{-y_1 l} \right\} +$$

$$e^{2y_1 l} \left[(y_1 A_1 + \beta_1 A_2) A_2 - y_1 A_1 A_2 \right] + \beta_1 A_1^2 + (\beta_1 A_2 - y_1 A_1) A_2 - (y_1 A_1 + \beta_1 A_2) (A_2 + \frac{2y_1}{\beta_1} A_1) -$$

$$- A_1 (A_2 + \frac{2y_1}{\beta_1} A_1) + \beta_1 A_1^2 + y_1 A_1 A_2 + \beta_1 A_1^2$$

$$+ e^{-2y_1 l} \left[(y_1 A_1 - \beta_1 A_2) (A_2 + \frac{2y_1}{\beta_1} A_1) + A_1 y_1 (A_2 + \frac{2y_1}{\beta_1} A_1) - A_1^2 \beta_1 \right] = 0$$

$$y_1 A_1 A_2 - \beta_1 A_2^2 + \frac{2y_1^2}{\beta_1} A_1^2 - y_1 A_1 A_2 + y_1 A_1 A_2 + \frac{2y_1^2}{\beta_1} A_1^2 - A_1^2 \beta_1$$



$$y = a \cos x$$

$$[E\theta \alpha^4 - P\alpha^2 + pg = 0]$$

$$\alpha^4 - \frac{P}{E\theta} \alpha^2 + \frac{pg}{E\theta} = 0$$

17

$$E\theta \left\{ \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{3}{8} a^3 \alpha^6 [\cos x - 9 \cos 3x] \right\} + P \frac{d^2 y}{dx^2} + pg y = 0$$

$$y = A x \sin \alpha x + B \cos 3\alpha x + a \cos \alpha x$$

$$E\theta \left\{ -4A \alpha^3 \cos \alpha x + A x \alpha^4 \sin \alpha x + 81 B \alpha^4 \cos 3\alpha x + \alpha^4 a \cos \alpha x - \frac{3}{8} a^3 \alpha^6 (\cos \alpha x - 9 \cos 3\alpha x) \right.$$

$$\left. + P \left\{ 2A \alpha \cos \alpha x - A x \alpha^2 \sin \alpha x - 9 B \alpha^2 \cos 3\alpha x - \alpha^2 a \cos \alpha x \right\} + pg (A x \sin \alpha x + B \cos 3\alpha x + a \cos \alpha x) = 0 \right.$$

$$A (-4E\theta \alpha^3 + 2P\alpha) = \frac{3}{8} a^3 \alpha^6 E\theta$$

$$B (E\theta \cdot 81 \alpha^4 - 9P\alpha^2 + pg) = \frac{27}{8} a^3 \alpha^6$$

$$y = a \cos \alpha x + \frac{3}{16} \frac{a^3 \alpha^5 E\theta}{P - 2\alpha^2 E\theta} x \sin \alpha x + \frac{27}{8} \frac{a^3 \alpha^6 E\theta}{81 \alpha^4 E\theta - 9P\alpha^2 + pg} \cos 3\alpha x$$

$$\alpha x = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$a \sin \delta + \frac{3}{16} \frac{a^3 \alpha^5 E\theta}{P - 2\alpha^2 E\theta} \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \cos \delta + \frac{27}{8} \frac{a^3 \alpha^6 E\theta}{81 \alpha^4 E\theta - 9P\alpha^2 + pg} \sin \delta = 0$$

$$\delta = + \frac{3}{16} \frac{a^2 \alpha^4 E\theta}{2\alpha^2 E\theta - P} \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha l = \pi \left[1 - \frac{3}{16} \frac{a^2 \alpha^4 E\theta}{2\alpha^2 E\theta - P} \right]$$

$$\pi + l\varepsilon = \pi \left[1 - \frac{3}{16} \frac{a^2 E\theta \left(\frac{\pi^2}{l^2} + 4\varepsilon \frac{\pi}{l} \right)}{2E\theta \left(\frac{\pi^2}{l^2} + 2\varepsilon \frac{\pi}{l} \right) - P} \right]$$

$$\varepsilon = - \frac{\pi}{l} \frac{3}{16} \frac{a^2 E\theta \frac{\pi^2}{l^2}}{2E\theta \frac{\pi^2}{l^2} - P}$$

$$\frac{l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{E\theta}{pg}} > 2$$

approximativ: $P > 2\sqrt{E\theta pg}$
 $\frac{P^2}{E\theta} > 4pg$

$$\alpha = \frac{\pi}{l} + \varepsilon$$

$$\alpha = \frac{\pi}{l} \left[1 - \frac{3}{16} \frac{a^2 \frac{\pi^2}{l^2}}{\left(2 - \frac{P}{E\theta} \frac{l^2}{\pi^2} \right)} \right] = \sqrt{\frac{P}{2E\theta} + \left| \left(\frac{P}{2E\theta} \right)^2 - \frac{pg}{E\theta} \right|}$$

2. wenn P ten werten an maxim $\frac{P}{E\theta} \frac{l^2}{\pi^2} < 2$
 (4. woyh granich!) $\frac{P}{E\theta} \frac{l^2}{\pi^2} < 2$

$$P = \alpha^2 E\theta + \frac{\rho g}{\alpha^2} + p$$

$$\frac{E\theta}{\rho g} \alpha^4 > 1$$

$$\sin \alpha \lambda - \frac{3a^2 \alpha^5 E\theta}{16[\alpha^2 E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^2} - p]} (l-1) \alpha \lambda + \frac{27}{8} \frac{a^2 \alpha^6 E\theta \sin 3\alpha \lambda}{72 \alpha^4 E\theta - 8 \rho g - 9 \alpha^2 p} = 0$$

$$\sin \alpha \lambda - 3\alpha^2$$

$$\alpha \lambda - \frac{\alpha^3 \lambda^3}{6} = \frac{3}{16} \frac{a^2 \alpha^3 E\theta (l-1) (1 - \frac{\alpha^2 \lambda^2}{2})}{E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^2} - \frac{p}{\alpha^2}} - \frac{27 \cdot 3 \cdot a^2 \alpha^2 E\theta \alpha \lambda}{8 \cdot 72 E\theta - 8 \frac{\rho g}{\alpha^2} - 9 \frac{p}{\alpha^2}}$$

$$\frac{\lambda}{l} \left[1 - \frac{\alpha^2 \lambda^2}{6} \right] = a^2 \alpha^2 \left\{ \frac{3}{16} \frac{E\theta (1 - \frac{\lambda}{l}) (1 - \frac{\alpha^2 \lambda^2}{2})}{E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^2} - \frac{p}{\alpha^2}} - \frac{81}{8} \frac{E\theta \frac{\lambda}{l} (1 - \frac{9\alpha^2 \lambda^2}{6})}{72 E\theta - 8 \frac{\rho g}{\alpha^2} - 9 \frac{p}{\alpha^2}} \right\}$$

$$\lambda \sim \frac{a^2}{l}$$

$$\left(\frac{V_0}{a} \right) = 3a^2 \alpha^2 \left[\frac{\alpha \lambda}{8(E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^2} - \frac{p}{\alpha^2})} + \frac{27 \alpha \lambda}{72 E\theta - 8 \frac{\rho g}{\alpha^2} - 9 \frac{p}{\alpha^2}} \right]$$

$$a^2 \frac{a^2}{l^4}$$

$$\frac{\lambda}{l} \left[1 - \frac{\alpha^2 \lambda^2}{6} \right] = a^2 \alpha^2 \left\{ \frac{3}{16} \frac{E\theta}{E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^2} - \frac{p}{\alpha^2}} - \frac{\lambda}{l} \left[\frac{3}{16} \frac{E\theta}{E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^2} - \frac{p}{\alpha^2}} + \frac{81}{8} \frac{E\theta}{72 E\theta - 8 \frac{\rho g}{\alpha^2} - 9 \frac{p}{\alpha^2}} \right] \right\}$$

$$\left(\frac{V_0}{a} \right) = 3a^2 \alpha^2$$

$$\frac{\lambda}{l}$$

$$3 \frac{\lambda}{l} \left[1 - \frac{\alpha^2 \lambda^2}{6} \right] \left\{ \frac{\alpha \lambda}{8 \cdot E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^2} - \frac{p}{\alpha^2}} \right.$$

$$\frac{\lambda}{l} = a^2 \alpha^2 \left(M - \frac{1}{l} N \right)$$

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{a^2 \alpha^2 M}{1 + a^2 \alpha^2 N} = a^2 \alpha^2 M \left[1 - a^2 \alpha^2 N \right]$$

$$\alpha = \frac{N}{l}$$

$$\frac{\lambda}{l} \neq a^2 \alpha^2 \frac{3}{16} \frac{E\theta}{E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^2} - \frac{p}{\alpha^2}}$$

Wsk. dass wir hier p , $\frac{\rho g}{\alpha^2}$ (mit α^2)
 $\frac{\lambda}{l}$ (mit α^2)
 p multipl. α^2 (mit α^2)

Il n'est pas possible de trouver :

$$2 \sqrt{\frac{3}{2} \frac{E k p g}{(1-\nu^2) n}} < P < F$$

$$k = n \cdot 10^3$$

$$\lambda = 2n \sqrt{\frac{3}{2} \frac{E k^3 n}{(1-\nu^2) p g}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{E \cdot F}{(1-\nu^2)} \neq \frac{1}{2} \frac{F^2}{k p g} = \left(\frac{\lambda}{2n} \right)^2 \left(\frac{p g}{F} \right)^2$$

$$n^2 k^2 = \left(\frac{\lambda}{2n} \right)^2 \left(\frac{p g}{F} \right)^2$$

$$k n = \left(\frac{\lambda}{2n} \right)^2 \frac{p g}{F}$$

$$\lambda = 2n \sqrt{\frac{n k \cdot F}{p g}}$$

$$n k = 10 \text{ km} = 10^6$$

$$F = 8 \cdot 10^5 \text{ g}$$

$$p = 2$$

$$\lambda = 2n \sqrt{\frac{10^6 \cdot 8 \cdot 10^5}{2}}$$

$$= 2n \sqrt{4 \cdot 10^{11}}$$

$$= 40 \cdot 10^5 = 40 \text{ km}$$



$$E = (1) =$$

$$D = \sum E_i$$

$$P = \sum F_i$$

$$D = E = F$$

$$F = F_k$$

$$P = F \geq k$$

$$D = E \leq k^2$$

$$\sqrt{\frac{p g \cdot k^3}{(1-\nu^2) n}} = F_k$$

$$\lambda = 2n \sqrt{\frac{3}{2} \frac{E k^3 n}{(1-\nu^2) p g}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{E p g}{(1-\nu^2)} = F^2 \left(\frac{\lambda}{2n} \right)^2 = \left(\frac{p g}{F} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{2n} \right)^2$$

$$\frac{3 k}{2 \lambda} = \left(\frac{\lambda}{2n} \right)^2 \frac{p g}{F}$$

$$\frac{1}{2} k = \frac{F^2}{E p g}$$

$$n k = 10^6$$

$$k = \frac{4}{12} F$$

$$\frac{1}{2} k = \frac{F^2}{E p g}$$

$$n k = 10^6$$

$$k^2 = 3 F^2 \cdot 10^6$$

$$k = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 10^3 \frac{E p g}{F}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 10^3 \frac{E p g}{F}}$$

$$\frac{10^3 \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 10^3 \frac{E p g}{F}}}{282} = 10^5 \sqrt{0.86}$$

$$0.93$$

$$126 \text{ g}$$

$$n \sqrt{\frac{3}{2} \frac{E k^3 n}{(1-\nu^2) p g}} = 2n \sqrt{\frac{3}{2} \frac{E k^3 n}{(1-\nu^2) p g}}$$

$$= 311 \cdot \sqrt{54} = 2375$$

Lwowska c. k. naukowa Komisya egzaminacyjna dla kandydatów
zawodu nauczycielskiego w gimnazyach i szkołach realnych.

Temat pracy *klausurowy*

z zakresu prawy jako przedmiotu publicznego

dla P. R. Dziurzyńskiego

- 1). O ile by się przyspieszył na dalsi chód zegara wahadłowego, gdyby pod nim w ole

$$P = D\left(\frac{P}{\lambda}\right) + \rho g\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)$$

$$\lambda = 2\pi \sqrt[4]{\frac{D}{\rho g}}$$

$$\frac{\lambda}{\pi} = 2 \sqrt[4]{\frac{D}{e_j}}$$

$$P = \frac{D}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{\rho_f}{D}} + \rho_g \sqrt{\frac{D}{\rho_g}}$$

$$= \frac{\rho_f}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{\rho_f}{D}} + \rho_g \sqrt{\frac{D}{\rho_g}}$$

$$(a^2\sqrt{D} + \sqrt{p}g)^2 = 0$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{C_F}{D}}$$

$$\lambda = \frac{m}{\alpha} = 20 \text{ V}$$

data `PARITY = +44074120 = 3 + 1 41210 = 14 - 47407100 TABS = 00000 04 0000 00000000`

podpis egzaminatora

Ocena pracy:

$$\frac{y}{x} =$$

張

$$+A \left[\frac{z_2}{z_1} - 1 \right] + \frac{\sqrt{z_1 z_2}}{z_1}$$

$$y = \frac{p}{f} \cdot \frac{L}{2\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$\left[\frac{(1 + \cos \alpha)^2}{2P} - \frac{P \cos^2 \alpha}{2P} \right] - \frac{P \cos^2 \alpha}{2P} - A$$

A
"
~~for~~
rld
L
rld
L

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha^2} = -\Delta \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 0$$

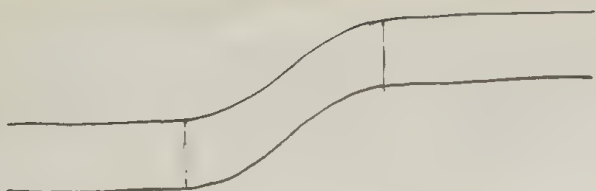
$$\frac{d^2 x}{dx^2} = -A \sqrt{\frac{D}{\rho g}} \sin(x) \quad \dots \quad -\frac{\rho g}{D} \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$y'' = A \frac{dx}{dt} + \dots + A + A$$


 1871

data AV

podpis egzaminatora



$$X_u = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$X_y = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial X_u}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0$$

$$Y_y = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Y_u}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = 0$$

$$u = 0$$

$$X_u = \lambda \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

$$Y_y = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$X_y = \mu \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$u = A y \cos \alpha x$$

$$X_u = -A \alpha y \sin \alpha x [\lambda + 2\mu]$$

$$v = 0 \sin \alpha x$$

$$Y_y = -A \alpha y \sin \alpha x \lambda$$

$$X_y = [\mu A \sin \alpha x + \alpha \Delta] \cos \alpha x$$

$$-(\lambda + 2\mu) y A \alpha^2 \cos \alpha x = 0$$

$$-\alpha \mu A \sin \alpha x - A \alpha \lambda \sin \alpha x = 0$$

$$u = A f(y) \cos \alpha x$$

$$X_u = -A \alpha f(y) \sin \alpha x (\lambda + 2\mu)$$

$$v = 0 \sin \alpha x$$

$$Y_y = -A \alpha f(y) \sin \alpha x \lambda$$

$$X_y = \mu [A f'(y) + \alpha \Delta] \cos \alpha x$$

$$-A \alpha^2 f(y) \cos \alpha x (\lambda + 2\mu) + \mu A f'(y) \cos \alpha x = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \alpha^2 f(y) = \mu f'(y)$$

$$-\alpha \mu [A f'(y) + \alpha \Delta] \sin \alpha x - A \alpha f(y) \lambda \sin \alpha x = 0$$

$$(\lambda + \mu) f'(y) = -\alpha \lambda \mu$$

$$X_u = Y_y = X_y = 0$$

$$Z_2 = -\frac{W(l-z)x}{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x} = 0$$

Fluxure of plate

$$\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{Wx}{\theta} = 0$$

$$Y_2 = 0$$

$$X_x = 0 \quad | \quad x = \pm a$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$X_2 = -\frac{Wx^2}{2\theta} + c = \frac{W}{2\theta} (a^2 - x^2)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{W}{2\theta} \frac{(a^2 - x^2)}{\mu}$$

$$(\lambda + 2\mu) \Delta = -\frac{W(l-z)x}{\theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda}{2\mu} \frac{W(l-z)x}{(\lambda + 2\mu)\theta} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{W(l-z)x}{(\lambda + 2\mu)\theta} \left[-1 - \frac{\lambda}{\mu} \right]$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{W(l-z)x}{\theta}$$

$$[(\lambda + 2\mu)^2 - \lambda^2] \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{W(l-z)x}{\theta} \lambda$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{W(l-z)x \lambda}{4(\lambda + \mu)\mu \theta}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\lambda + 2\mu}{4(\lambda + \mu)\mu \theta} \frac{W(l-z)x}{\theta}$$

Elektronový pohyb, rovinový a v P.

20

$$y = a \cos \alpha x - \frac{3}{16} a^3 \alpha^3 x \sin \alpha x - \frac{3}{64} a^3 \alpha^2 \cos 3 \alpha x$$

$$l = \int_0^a \frac{dy}{dy} dy = \int \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right] dx = x + \frac{1}{2} \int \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

$$\alpha x_0 = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{3}{16} a^2 \alpha^2 \right]$$

$$= \frac{dy}{dx} y - \int y \frac{dy}{dx} dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -a \alpha \sin \alpha x \dots$$

$$l = x + \frac{a^2 \alpha^2}{2} \int \sin^2 \alpha x dx$$

$$\frac{1 - \cos 2 \alpha x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2 \alpha x}{4 \alpha} = \frac{x}{2} - \frac{a^2 \alpha^2 x \cos \alpha x}{2 \alpha}$$

$$\alpha l = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{3}{16} a^2 \alpha^2 \right] \left[1 + \frac{a^2 \alpha^2}{4} \right] - \frac{a^2 \alpha^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} \frac{3}{16} a^2 \alpha^2$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{a^2 \alpha^2}{16} \right]$$

$$a^2 = \frac{16}{\alpha^2} \left[\frac{2 \alpha l}{\pi} - 1 \right]$$

odstraníme jímž dává l, a , možná míří $\alpha = \sqrt{\frac{c}{E_0}}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial u}{\partial z^2} = 0 = \frac{\partial u}{\partial z^2} + \frac{\lambda+2\mu}{4\mu} \frac{Wx}{(\lambda+\mu)\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\lambda+2\mu}{4\mu(\lambda+\mu)} \frac{Wx}{\theta}$$

$$u = \frac{W\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)} \frac{(l-z)^2}{2} + f(z)$$

$$w = -\frac{W(\lambda+2\mu)}{4\mu(\lambda+\mu)\theta} \left(l z - \frac{z^2}{2} \right) x + \varphi(x)$$

$$f(z) = \frac{W(\lambda+2\mu)}{4\mu(\lambda+\mu)\theta} \left(l \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right)$$

$$\varphi(x) = \frac{W}{2\theta\mu} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} + \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \frac{x^3}{6} \right]$$

$$\underbrace{-\frac{W(\lambda+2\mu)}{4\mu(\lambda+\mu)\theta} \left(l z - \frac{z^2}{2} \right) + \varphi(x)}_{= f'(z)} - \frac{W\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)\theta} \frac{x^2}{2} + f'(z) = \frac{W}{2\theta} \frac{a^2 - x^2}{\mu}$$

$$i \frac{k \pi x}{l} + \alpha \sin \frac{m \pi x}{l}$$

$$\frac{\pi}{l} \left[k \cos \frac{k \pi x}{l} + \alpha \sin \frac{m \pi x}{l} \right]$$

$$k + \alpha m = 0$$

$$\alpha = -\frac{k}{m}$$

$$(-1)^k k + \alpha (-1)^m m = 0$$

$$(-1)^k k - \frac{k}{m} (-1)^m m = 0$$

$$(-1)^k = (-1)^m$$

$$m, k \quad m = k+2$$

$$\alpha = -\frac{k}{k+2}$$

$$i \frac{k \pi x}{l} - \frac{k}{k+2} \sin \frac{(k+2) \pi x}{l}$$

$$E\theta \frac{dy}{ds} + Pz + \rho gh x = M \cos \theta \quad M =$$

$$= \frac{\rho gh l}{2} \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^3$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{R} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{dy}{dx} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{R} \right) \frac{dx}{ds} = \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{3}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{d^3 y}{dx^3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

$$= \frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \frac{d^3 y}{dx^3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 3 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \frac{dy}{dx}$$

$$E\theta \left\{ \frac{d^3 y}{dx^3} \left[1 - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] - 3 \frac{d^2 y}{dx^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} + P \frac{dy}{dx} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) + \rho gh x = M \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)$$

$$E\theta \left\{ \frac{d^3 y}{dx^3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] + 3 \frac{d^2 y}{dx^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} + P \frac{dy}{dx} + \rho gh x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = M$$

Given point $E\theta \frac{d^3 y}{dx^3} + P \frac{dy}{dx} = f(x)$

$$\alpha^2 = \frac{P}{E\theta}$$

$$f(x) = E\theta x^3 + P x = 0$$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 0 \\ \eta_2 &= \pm \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \\ \eta_3 &= \pm \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \end{aligned}$$

$$f(x) = 3E\theta x^2 + P$$

$$y = \frac{1}{P} \int f dx + \frac{e^{i\alpha x}}{-3E\theta \alpha^2 + P} \int e^{-i\alpha \xi} f d\xi + \frac{e^{-i\alpha x}}{-3E\theta \alpha^2 + P} \int e^{i\alpha \xi} f d\xi$$

$$\int \left[e^{i\alpha(x-\xi)} + e^{-i\alpha(x-\xi)} \right] f d\xi$$

$$P - 3\alpha^2 E\theta = -2P$$

$$y = \frac{1}{P} \int f d\xi - \frac{1}{P} \int f(\xi) \cos \alpha(x-\xi) d\xi$$

$$\sum \frac{e^{r_n x}}{f(r_n)} \int e^{-r_n \xi} V d\xi$$

$$N_p: f(\xi) = \rho gh \left(\frac{l}{2} - \xi \right)$$

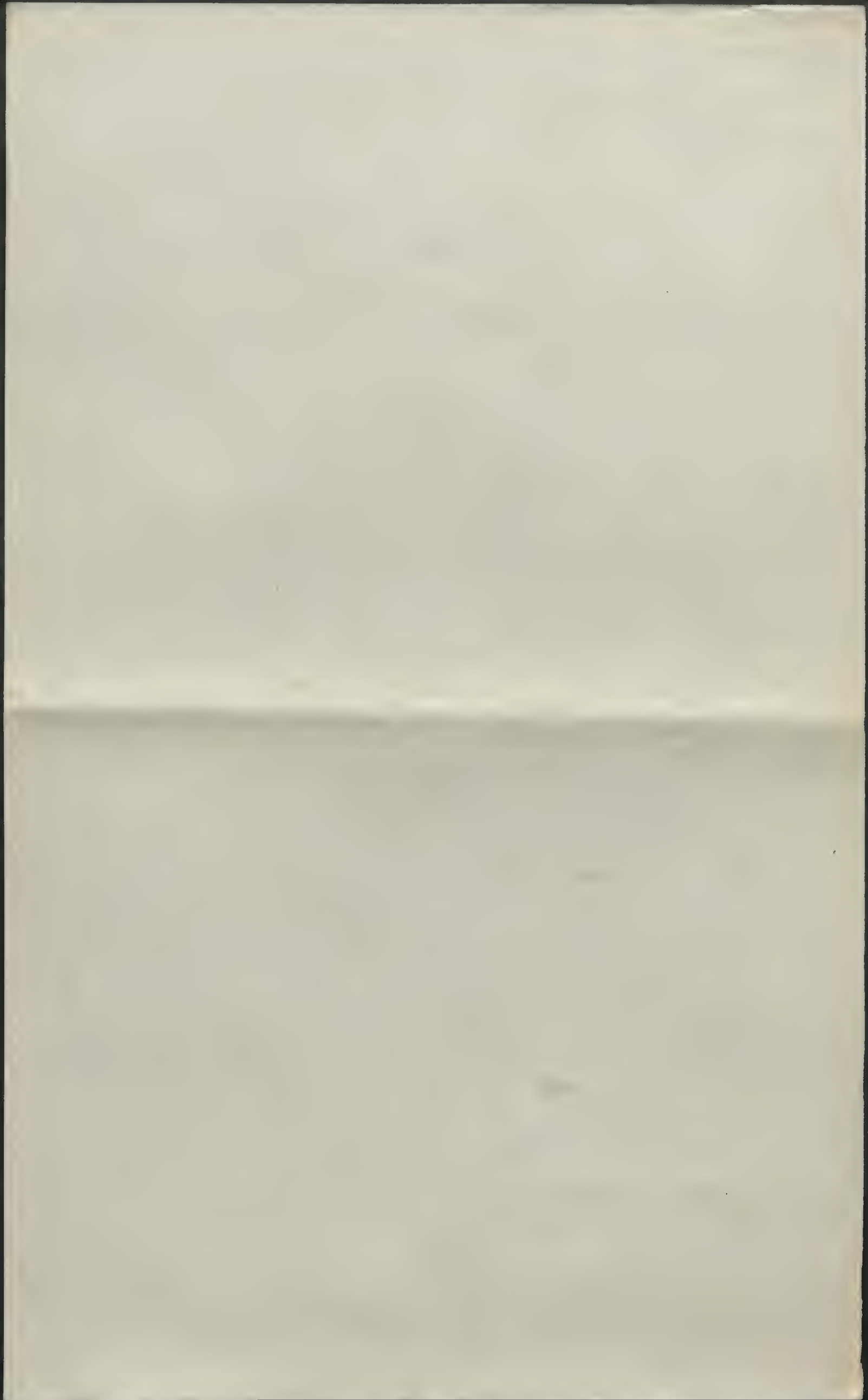
$$\int f d\xi = \rho gh \left(\frac{l\xi}{2} - \frac{\xi^2}{2} \right) = \frac{\rho gh}{2} (lx - x^2)$$

$$\int f \cos \alpha(x-\xi) d\xi = \left[\frac{\sin \alpha(x-\xi)}{\alpha} + \frac{\cos \alpha(x-\xi)}{\alpha^2} \right]_0^x = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2}$$

$$y = \frac{\rho gh}{2P} \left[lx - x^2 + \frac{2}{\alpha^2} \left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2} \right) \right] + A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

$$y' = \frac{1}{2} \left[l - 2x + 2l \cos \alpha x - 2 \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \right]$$

$$y'' = -2 \left[\alpha^2 \frac{\sin \alpha x}{\alpha} - \alpha \cos \alpha x \right]$$



$$y = \int \left[lx - x - \frac{l}{2} \frac{\cos(x - \frac{l}{2}) - \cos \frac{l}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \right] + \sum a_k \frac{k \pi x}{l} + \dots$$

$$\frac{dy}{dx} = \int \left[l - 2x + l \frac{\sin(x - \frac{l}{2})}{\sin \frac{l}{2}} \right] + \sum a_k \frac{k \pi}{l} \cos \frac{k \pi x}{l} + \dots$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \int \left[-2 + \alpha l \frac{\cos(x - \frac{l}{2})}{\sin \frac{l}{2}} \right] - \sum a_k \left(\frac{k \pi}{l} \right)^2 \sin \frac{k \pi x}{l} \quad \parallel \frac{d^2 y}{dx^2} = \int \alpha l^2 \frac{\cos(x - \frac{l}{2})}{\sin \frac{l}{2}} - \sum a_k \left(\frac{k \pi}{l} \right)^2 \cos \frac{k \pi x}{l}$$

$$U = \frac{\pi \theta}{2} \int \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi \theta}{2} \left[\dots + 4 \int \sum a_k \left(\frac{k \pi}{l} \right)^2 \frac{l}{k \pi} [(-1)^k - 1] - \frac{2 \alpha l}{\sin \frac{l}{2}} \sum a_k \left(\frac{k \pi}{l} \right)^3 \frac{1 - (-1)^k}{\left(\frac{k \pi}{l} \right)^2 - \alpha^2} + \sum a_k^2 \left(\frac{k \pi}{l} \right)^4 \frac{l}{2} \right]$$

$$V = 2 P \int y dx$$

$$= 2 P \int \left[\dots - \frac{l}{k \pi} [(-1)^k - 1] \sum \frac{a_k}{k} \right]$$

$$W = \frac{P}{2} \int \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{P}{2} \left[\dots - 4 \int \sum a_k \frac{k \pi}{l} \left(\frac{l^2}{k \pi} \right) [(-1)^k - 1] + \frac{2 l \alpha}{\sin \frac{l}{2}} \sum a_k \frac{k \pi}{l} \alpha \frac{\cos \frac{l}{2}}{\alpha^2 - \left(\frac{k \pi}{l} \right)^2} \frac{1 - (-1)^k}{2} + \sum a_k^2 \left(\frac{k \pi}{l} \right)^2 \frac{l}{2} \right]$$

$$U_{sr} - W = \dots [(-1)^k - 1] \int \sum a_k \left[-4 \frac{k \pi}{l} + 2 \alpha l \frac{\cos \frac{l}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{k \pi}{l} \right)^3}{\left(\frac{k \pi}{l} \right)^2 - \alpha^2} \right] \frac{\pi \theta}{2} + \sum a_k^2 \left(\frac{k \pi}{l} \right)^4 \frac{\pi \theta}{2} \left[+4 \frac{l}{k \pi} + 2 \alpha l \frac{\cos \frac{l}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \frac{k \pi}{\alpha^2 - \left(\frac{k \pi}{l} \right)^2} \right] \frac{P}{2} - 4 \frac{l}{k \pi}$$

$$= [(-1)^k - 1] \int \frac{P}{2} \sum \left\{ a_k \left[4 \left(\frac{l}{k \pi} - \frac{k \pi}{\alpha^2} \right) + 2 \alpha l \frac{\cos \frac{l}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \frac{k \pi}{\alpha^2 - \left(\frac{k \pi}{l} \right)^2} \left[1 - \left(\frac{k \pi}{\alpha l} \right)^2 \right] \right] \right\} + \frac{1}{2} \sum a_k^2 \left(\frac{k \pi}{l} \right)^2 \left[\left(\frac{k \pi}{\alpha l} \right)^2 - 1 \right] \cdot \frac{P}{2}$$

$$= [(-1)^k - 1] \int \frac{P}{2} \sum a_k \left[4 \left(\frac{l}{k \pi} - \frac{k \pi}{\alpha^2} \right) + \frac{2 \alpha l \cos \frac{l}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \cdot k \pi \right] + \frac{P l}{4} \sum a_k^2 \left(\frac{k \pi}{l} \right)^2 \left[\left(\frac{k \pi}{\alpha l} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\sum a_k \frac{l}{k \pi} \left(\frac{\cos \frac{l}{2}}{\alpha^2} - \frac{\pi}{\alpha^2} \right)$$

$$= 4 \left(\frac{l}{k \pi} - \frac{k \pi}{\alpha^2} \right) \left(\frac{k \pi}{l} \right) + \frac{2 \alpha l \cos \frac{l}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \cdot k \pi$$

Warunki dla deformacji:

$$\sum k a_k = 0 \quad \sum k a_k [(-1)^k - 1] = 0$$

$$\text{zatem} \quad \sum k a_k [(-1)^k - 1] = 0$$

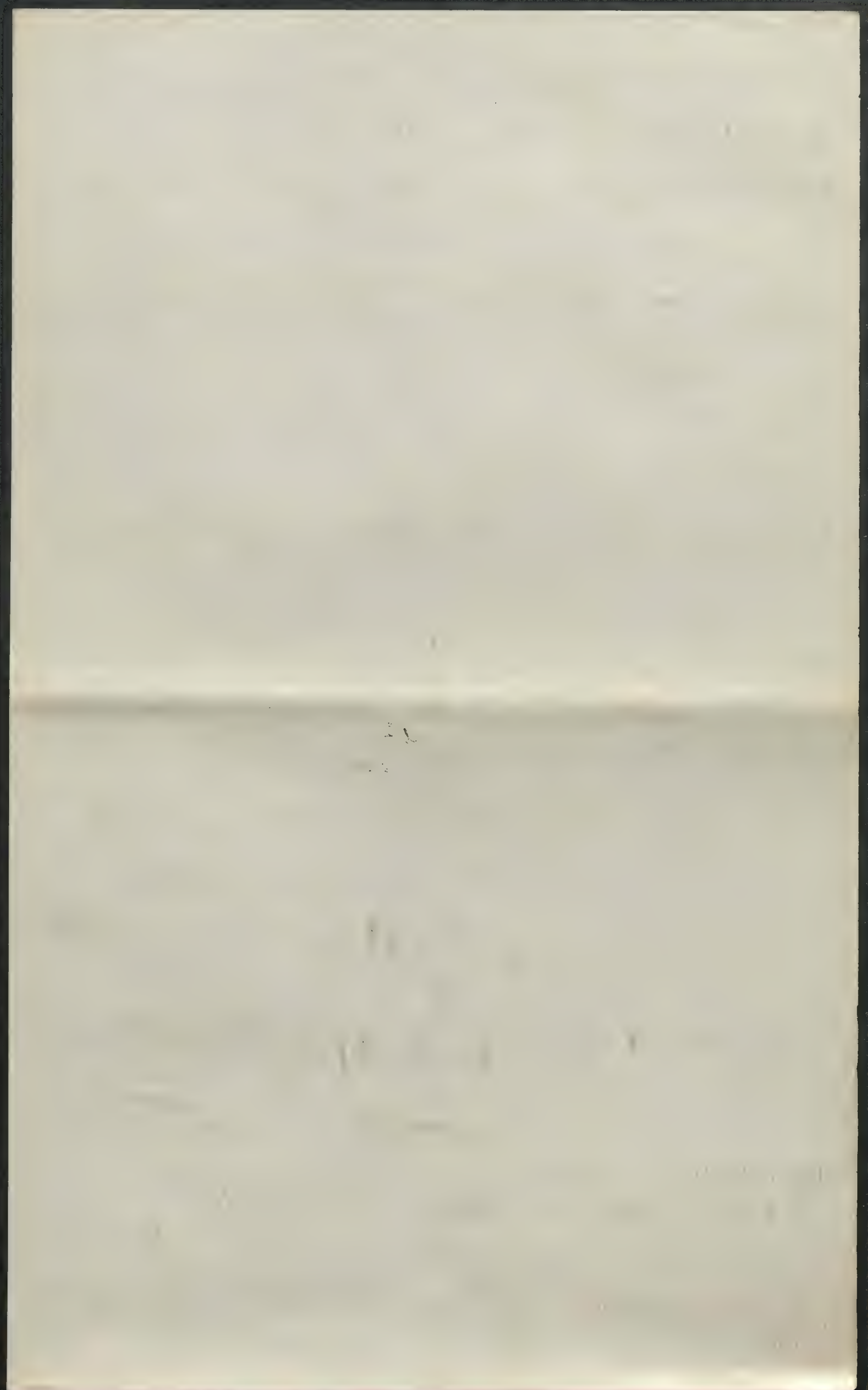
przebieg
z prędkością
z prędkością
z prędkością

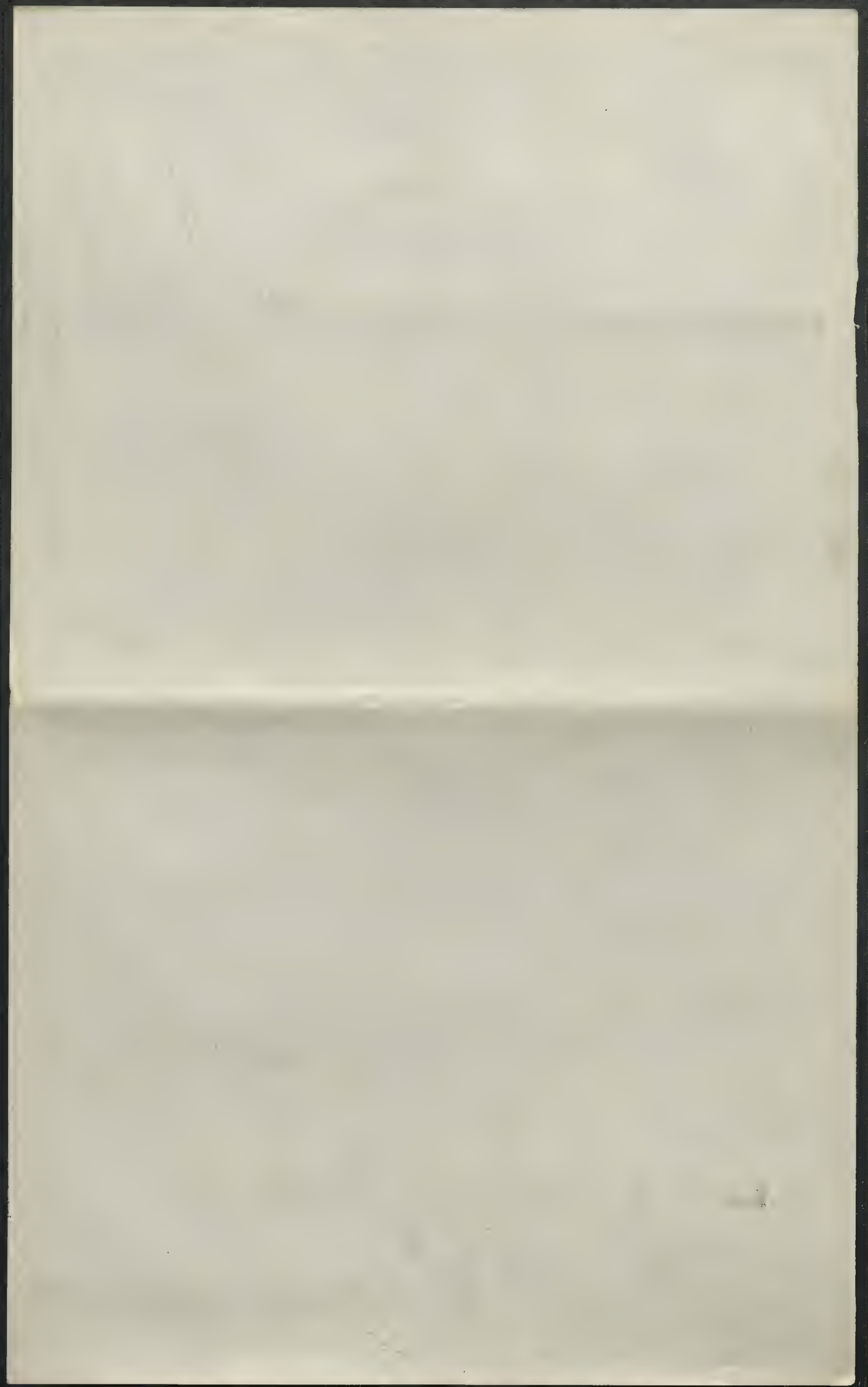
z prędkością
z prędkością
z prędkością

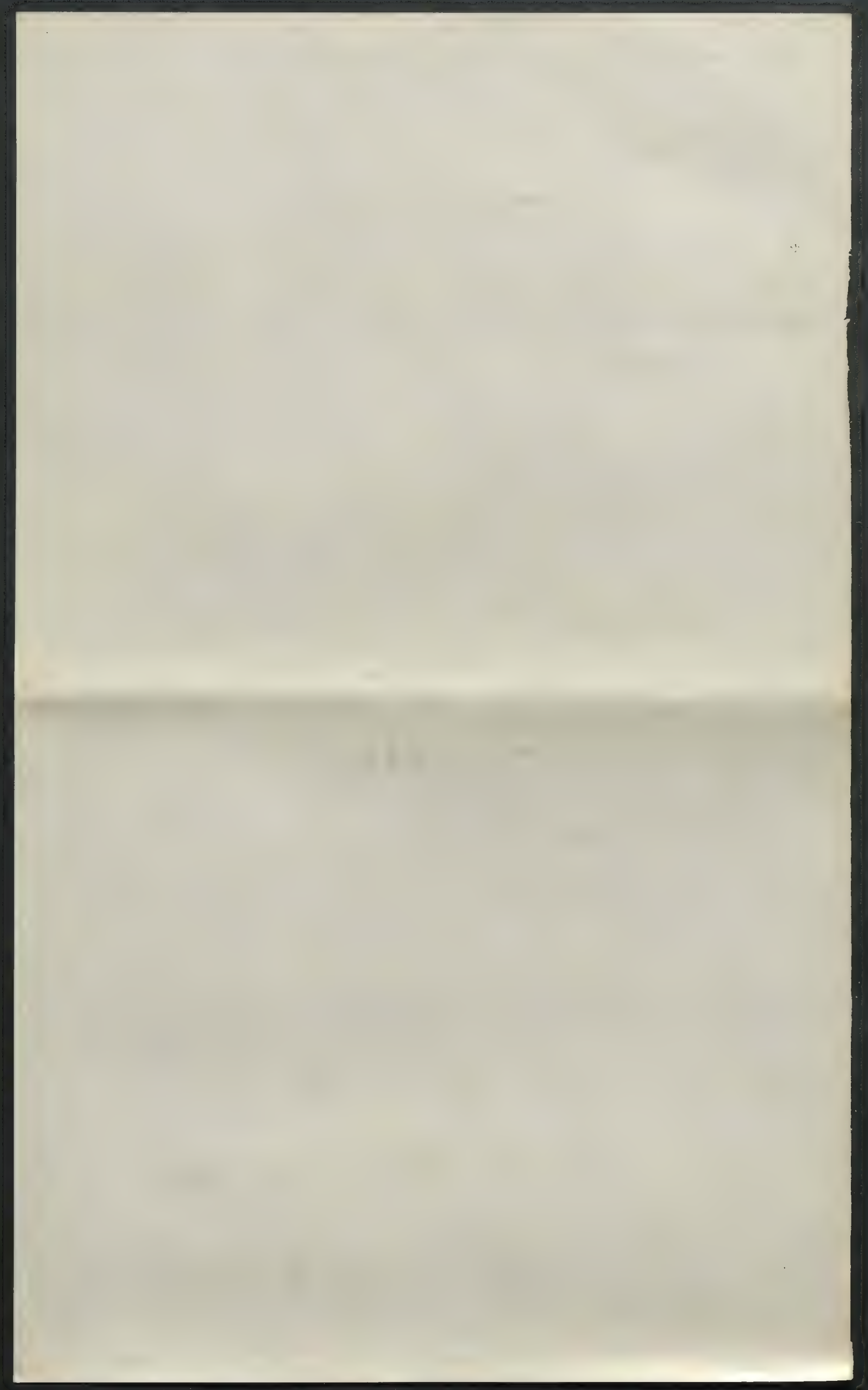
$$\int \frac{l^2}{4} - \frac{l}{2} \frac{1 - \cos \frac{l}{2}}{\sin \frac{l}{2}} = \frac{l^2}{4} \left[1 - \frac{\cos \frac{l}{2}}{1} \right]$$

$$= \int \left[\frac{l^2}{4} - \frac{l}{2} \frac{1 - \cos \frac{l}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \right] = \frac{l^2}{4} \left[1 - \frac{\cos \frac{l}{2}}{1} \right]$$

z prędkością
z prędkością
z prędkością







$$\frac{Dn^2}{dx} a^2 = \dots$$

$$a = \dots$$

D

P = 0

$$D\beta^2 = P$$

$$\frac{24}{8} \frac{3}{7264}$$

$$y = a \sin \rho x + 3 \frac{\beta^3 a^3}{16} \times \cos \rho x + 3 \frac{\beta^3 a^3}{64} \sin 3\rho x$$

$$\frac{dy}{dx} = \rho \left[a \cos \rho x + 3 \frac{\beta^3 a^3}{16} \cos \rho x - 3 \frac{\beta^3 a^3}{16} \times \sin \rho x + \frac{9}{64} a^3 \beta^2 \cos 3\rho x \right]$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \rho^2 a^2 \left[\cos^2 \rho x \left[1 + \frac{3a^2 \beta^2}{16} \right]^2 - 2 \cos \rho x \left[3 \frac{\beta^3 a^3}{16} \times \sin \rho x - \frac{9}{64} a^3 \beta^2 \cos 3\rho x \right] \right]$$

$$\delta = \frac{3a^2 \beta^2 n}{16}$$

$$\rho l = n + \frac{a^2 \beta^2 n}{4} \left[1 + \frac{3}{16} \right]$$

$$\rho l = n \left[1 + a^2 \beta^2 \right]$$

$$a^2 = \frac{\rho l - n}{\rho n} = \frac{l \sqrt{\frac{P}{D}} - n}{\frac{D}{P} n}$$

$$a^2 = \frac{l \sqrt{\frac{P}{D}} - n}{\frac{D}{P} n}$$

$$\rho l = n$$

$$P = \frac{D l^2}{n^2} (1 + \epsilon)$$

$$l \sqrt{\frac{P}{D}} = \frac{n \sqrt{1 + \epsilon}}{\sqrt{1 + \epsilon}}$$

$$= n \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right)$$

$$= \frac{n \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right) - n}{\frac{D}{P} n} = \frac{\epsilon}{2} \frac{l^2}{n^2}$$

Elastica z węzłami druciem z tego cięciem

$$M_0 - Mx + Py + \rho g h \int_0^s (x - \xi) ds = -\frac{E\theta}{R} = -E\theta \frac{dy}{ds}$$

$$-M \frac{dx}{ds} + P \frac{dy}{ds} + \rho g h x = -E\theta \frac{d\phi}{ds}$$

$$-M \cos \theta + P \sin \theta + \rho g h \times = - \cancel{E\theta} \frac{dr}{ds}$$

$$\left([M \sin \theta + P \cos \theta] \frac{dy}{ds} + \rho g h \, ds \right) = - E \theta \frac{d^3 y}{ds^3}$$

Uporabimo $-1 + pghs + 2xyz = -20 \frac{d^2}{ds^2}$

$$-M \frac{dy}{dx} - 2 \sin \theta + \rho g h \int dx \, dy = -\frac{\rho g}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

$$P_{xy0} = -E\theta \frac{d^2 y_0}{ds^2}$$

$$f = f_0 + \varphi$$

Pythia:

$$-M + pgh_s + \cancel{P_{imp} \frac{dy_o}{dt_o}} + P_{s-p} u_{y_o} = -E \theta \frac{dy_o}{dt_o} - E \theta \frac{dy}{dt_o}$$

$$-\frac{M}{\rho} + pgh + P \underbrace{\varphi_{c(s)}}_{c(s)} = -E\theta \frac{dy}{ds}$$

Pythia: $\cancel{E} \frac{a^2}{ds^2} + P_4 + pghs - M = 0$

$$\varphi = A \sin\left(\sqrt{\frac{P}{B\sigma}} s + \varepsilon\right) = \frac{\rho g h}{P} s + \frac{M}{P}$$

Напряженность ток : мозамы мозамы эластика бес из эла : $s = \frac{1}{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha}}$

a następnie ewolucyjna modyfikacja spowodowana ciążą

stud. wystawy stać się też w wywiadach porównawczych

g. Klein. Hat mit schwarzer gezeichnete Kettlinie
in ein klein fernes weichen weißes

$$y = y_0 + y_1$$

$$M_0 - M_x + P y_1 + \rho g h \int_0^x (x - \xi) dx = -EA \frac{dy}{dx}$$

Nie pranta

Nu moare ugra' zarady superpozycji jdy wogdyhwa q skohuona Tak samo jni 51

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{126} \cdot \frac{1}{1.06}$$

$\ell^{-p \times}$ $\omega p \times$

25
22

$$x \frac{1}{2}$$

$$e^{-2n} =$$

$$\ln y_2 = \frac{0.4343}{A}$$

$$\begin{array}{r} 4359^{13} \\ \underline{4971} \\ 2010 \\ 8639 \end{array}$$

2/12/20

$$\frac{d\phi}{dx} = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

Priloga k temu, da se izračuna, da se izračuna, da se izračuna...

Priloga k temu, da se izračuna, da se izračuna, da se izračuna...

Priloga k temu, da se izračuna, da se izračuna, da se izračuna...

Priloga k temu, da se izračuna, da se izračuna, da se izračuna...

$$\begin{aligned} UVR-W &= \frac{E\theta}{2} \left[-4 \frac{l^3}{\alpha^2} + \frac{5 \alpha^2 l^3}{2 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}} + 5 \alpha^2 l^2 \cot \frac{\alpha l}{2} \right] \\ &+ 2P \left[\frac{5 \alpha^2 l^3}{6} - \frac{2 l \alpha^2}{\alpha^2} + \frac{l^2 \alpha^2}{\alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} \right] \\ &- \frac{P}{2} \left[\frac{5 \alpha^2 l^3}{3} + \frac{5 \alpha^2 l^3}{2 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}} - \frac{5 \alpha^2 l^3}{\alpha} - \frac{8 \alpha^2 l^2}{\alpha^2} + \frac{3 \alpha^2 l^2}{\alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} \right] \\ &= P \left\{ -\frac{2 \alpha^2 l^3}{\alpha^2} + \frac{5 \alpha^2 l^3}{2 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}} + \frac{5 \alpha^2 l^2}{2 \alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \alpha^2 l^3}{3} + \frac{5 \alpha^2 l^3}{3} + \frac{2 l^2 \alpha^2}{\alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{\alpha^2 l^2}{\alpha^2} - \frac{5 \alpha^2 l^3}{6} - \frac{5 \alpha^2 l^3}{2 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}} - \frac{3 \alpha^2 l^2}{2 \alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} \right\} \\ &= P \left\{ -\frac{2 \alpha^2 l^2}{\alpha^2} + \frac{5 \alpha^2 l^3}{6} + \frac{5 \alpha^2 l^2}{\alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} \right\} = \frac{V}{2} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{P}{E\theta}$$

Priloga k temu, da se izračuna, da se izračuna, da se izračuna...

Priloga k temu, da se izračuna, da se izračuna, da se izračuna...

Priloga k temu, da se izračuna, da se izračuna, da se izračuna...

Priloga k temu, da se izračuna, da se izračuna, da se izračuna...

$$-\frac{l}{\alpha^2} + \frac{5}{6} \frac{l^2}{\alpha} + \frac{l^2}{\alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} = 0$$

$$\therefore \frac{2 \alpha^2 l^2}{6} + \alpha l \cot \frac{\alpha l}{2} = 2$$

$$\frac{\partial}{\partial l} = 0$$

$$-\frac{2}{\alpha^2} + \frac{l^2}{2} + \frac{2 l}{\alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} + \frac{l^2}{2 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}} = 0$$

$$\frac{l^2}{2} \left[1 - \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha l}{2}} \right] + \frac{2 l}{\alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} = \frac{2}{\alpha^2}$$

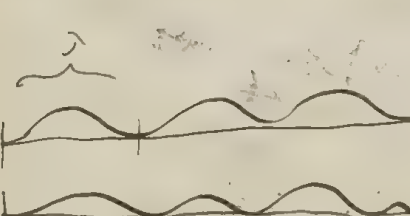
$$- \cot^2 \frac{\alpha l}{2}$$

$$2 l^2 \cot^2 \frac{\alpha l}{2} - 4 \alpha l \cot \frac{\alpha l}{2} + 4 = 0$$

$$[\alpha l \cot \frac{\alpha l}{2} - 2]^2 = 0$$

$$\alpha l \cot \frac{\alpha l}{2} = 2$$

$$\alpha l = \cot \frac{\alpha l}{2}$$



Priloga k temu, da se izračuna, da se izračuna, da se izračuna...

Priloga k temu, da se izračuna, da se izračuna, da se izračuna...

$$-\frac{l}{\alpha^2} + \frac{5}{6} \frac{l^2}{\alpha} + \frac{l^2}{\alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} <$$

$$< n \left[\frac{2 \alpha l - \alpha l}{\alpha^2} + \frac{(1 - \alpha l)^3}{6} + \frac{(1 - \alpha l)^2}{\alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} \right]$$

$$+ \left[\frac{2 \alpha l}{\alpha^2} + \frac{n^3 \alpha l^3}{6} + \frac{n^2 \alpha l^2}{\alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} \right]$$

$$= \frac{\alpha \alpha \alpha l}{\alpha \alpha \alpha l} = \frac{2}{\alpha \alpha l}$$

$$0 < n \left[\frac{\alpha l}{\alpha^2} - \frac{\alpha l}{\alpha^2} \right]$$

$$n \left[-\frac{2}{\alpha^2} + \frac{l^2}{2} + \frac{2 l}{\alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} - \frac{l^2}{2 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}} \right] \leq$$

$$+ \frac{n^3 \alpha l^3}{12}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n^3 \alpha l^3}{6} - \frac{n^3 \alpha l^3}{12} \\ &= \frac{n^3 \alpha l^3}{12} \end{aligned}$$

Podstawienie



$$y = A \sin(\alpha x + \varepsilon) - g x^2 + g l x + D$$

$$A \sin \varepsilon + D = 0$$

$$A \sin(\alpha l + \varepsilon) + D = 0$$

albo: $\alpha l = 2k\pi$

$$D = -A \sin \varepsilon = + \frac{2g}{\alpha^2}$$

$$y = g \left[\frac{l^2}{\alpha^2} - x^2 + lx - \frac{2}{\alpha^2} \frac{\sin(\alpha x + \varepsilon)}{\sin \varepsilon} \right]$$

$$l = \frac{2k\pi}{\alpha}$$

$$y = g \left[lx - x^2 - \frac{2[\sin(\alpha x + \varepsilon) - \sin \varepsilon]}{\alpha^2 \sin \varepsilon} \right]$$

$$y_{\frac{l}{2}} = g \left[\frac{l^2}{4} - \frac{2[\sin(k\pi + \varepsilon) - \sin \varepsilon]}{\alpha^2 \sin \varepsilon} \right]$$

$$= g \left[\frac{l^2}{4} \right] \quad k = \text{parzysta}$$

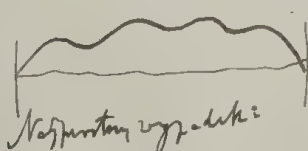
$$= g \left[\frac{l^2}{4} + \frac{4}{\alpha^2} \right] \quad k = \text{nieparzysta}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_0 = g \left[l + \frac{2 \cos \varepsilon}{\alpha} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = g \left[l - 2x - \frac{2 \cos(\alpha x + \varepsilon)}{\alpha \sin \varepsilon} \right] \quad \text{maksimum minimum}$$

$$\frac{dy}{dx} = g \left[-2 + \frac{2 \sin(\alpha x + \varepsilon)}{\sin \varepsilon} \right] \quad \varepsilon \text{ dowolne}$$

Punkty przegięcia: $\alpha x = 2m\pi$
 i wtedy $\alpha x = 2n\pi$



$$k=1$$

$$l = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{EI}{P}}$$

Wzrost asymetrii: $\sin(\alpha x + \varepsilon)$

$$\sin(\alpha l - \alpha x + \varepsilon)$$

$$= \sin(2k\pi - \alpha x + \varepsilon)$$

$$= \sin(2 - \alpha x)$$

co jest cieższe 2 wyjątki $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$

Wtedy: $y = g \left[lx - x^2 - \frac{2(\cos \alpha x - 1)}{\alpha^2} \right]$

to jest identyczne
 jeżeli $\frac{\alpha l}{2} = 0, \pi$

symetria stabilności
 wynika $\alpha l \leq \pi$

$$-\alpha^2 A \sin \varepsilon - 2g = 0$$

$$-\alpha^2 A \sin(\alpha l + \varepsilon) - 2g = 0$$

albo: $\varepsilon = \frac{\alpha l}{2} + (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$$y = g \left[lx - x^2 - \frac{2[\sin(\alpha x + \varepsilon) - \sin \varepsilon]}{\alpha^2 \cos \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$y_{\frac{l}{2}} = g \left[\frac{l^2}{4} - \frac{2(1 - \cos \frac{\alpha l}{2})}{\alpha^2 \cos \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

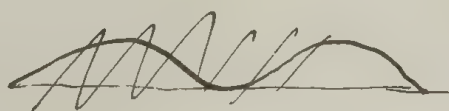
czy to minimum czy maksimum?

$$\frac{\alpha^2 l^2}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\alpha l}{2}}{\cos \frac{\alpha l}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha l}{4}}{\cos \frac{\alpha l}{2}} = \frac{2}{\cos \frac{\alpha l}{2} - 1}$$

a jeżeli tu będzie $\frac{dy}{dx} = g \left[l - 2x + \frac{2 \sin(\alpha x - \frac{l}{2})}{\alpha \cos \frac{\alpha l}{2}} \right]$

$x = \frac{l}{2} \neq 0$

czyli minimum



wzrost asymetrii $\frac{\alpha l}{2} \neq \frac{\pi}{2}$

$y_{\frac{l}{2}} = g \left[\frac{l^2}{4} - \frac{2(1 - \cos \frac{\alpha l}{2})}{\alpha^2 \cos \frac{\alpha l}{2}} \right]$

czy będzie punkt przegięcia?

$$\sin(\alpha x - \frac{l}{2}) = -\sin \alpha x$$

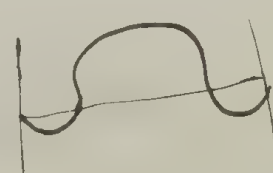
$$\frac{dy}{dx} = -2g \left[1 - \frac{\cos \alpha x}{\cos \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -2g \left[1 - \frac{\cos \alpha x}{\cos \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_0 = g \left[l - \frac{2}{\alpha} \frac{\sin \frac{\alpha l}{2}}{\cos \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$= g l \left[1 - \frac{2}{\alpha} \frac{\sin \frac{\alpha l}{2}}{\cos \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

jest to minimum $\frac{\alpha l}{2} < \frac{\pi}{2}$
 wzrost asymetrii!



$$y = A \sin(\alpha x + \varepsilon) - 5x^2 + 5lx + 0$$

$$\left. \begin{aligned} A \sin \varepsilon + 0 &= 0 \\ A \cos(\alpha l + \varepsilon) + 0 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y=0 \quad & \begin{cases} x=0 \\ x=l \end{cases} \end{aligned} \quad \dots \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\sin(\alpha l + \varepsilon) = \sin \varepsilon$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha A \cos(\alpha x + \varepsilon) - 10x + 5l$$

$$A \cos \varepsilon + 5l = 0$$

$$A \cos(\alpha l + \varepsilon) - 5l = 0$$

$$= \alpha A \cos \varepsilon - 5l$$

$$y = A [\sin(\alpha x + \varepsilon) - \sin \varepsilon] + 5x(l - x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha A \cos(\alpha x + \varepsilon) - 10x + 5l$$

$$\cos(\alpha l + \varepsilon) = \cos \varepsilon \quad \sin \varepsilon = \sin \varepsilon \quad \cos \varepsilon = \cos \varepsilon \quad \sin \varepsilon = \sin \varepsilon$$

$$\sin(\alpha l + \varepsilon) - \sin \varepsilon = 0$$

$$\cos(\alpha l + \varepsilon) - \cos \varepsilon = 0$$

$$\text{wz. albo } \frac{\alpha l}{2} = k\pi \quad \text{albo } \frac{\alpha l}{2} + \varepsilon = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha l = 2k\pi$$

$$\varepsilon = -\frac{\alpha l}{2} + (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$y = A [\sin(\alpha x + \varepsilon) - \sin \varepsilon] + 5lx - 5x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha A \cos(\alpha x + \varepsilon) + 5l - 10x$$

$$\begin{cases} \alpha A \cos \varepsilon + 5l = 0 \\ \alpha A \cos(\alpha l + \varepsilon) - 5l = 0 \end{cases}$$

$$(-1)^k \alpha A \sin \frac{\alpha l}{2} + 5l = 0$$

$$(-1)^{k+1} \alpha A \sin \frac{\alpha l}{2} + 5l = 0$$

numerowa

zatem przy tej k \uparrow co jest równoważna identyczności!

zatem tylko jemu

$$\alpha A \sin \frac{\alpha l}{2} = (-1)^{k+1} 5l$$

$$A = (-1)^{k+1} \frac{5l}{\alpha \sin \frac{\alpha l}{2}}$$

$$y = 5 \left[lx - x^2 + \frac{l}{\alpha} \frac{\sin(\alpha x + \varepsilon) - \sin \varepsilon}{\sin \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$\sin \left[\alpha \left(x - \frac{l}{2} \right) + (2k+1)\frac{\pi}{2} \right] = (-1)^k \cos \alpha \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

$$\sin \left[-\frac{\alpha l}{2} + \dots \right] = (-1)^k \cos \frac{\alpha l}{2}$$

$$y = 5 \left[lx - x^2 + (-1)^{2k+1} \frac{l}{\alpha} \frac{\sin(\frac{\alpha l}{2} - \alpha x) - \cos \frac{\alpha l}{2}}{\sin \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$U+V = \sum_{k=1}^n [(-1)^{k-1}] \int_0^1 a_k \left[-2 \frac{k^2 n^3}{\alpha^2 l^3} + \frac{l}{\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\alpha}{l^2} \left(\frac{k n}{l} \right)^3 - 2 \frac{l}{\alpha} \right] + \frac{l}{4} \sum_{k=1}^n a_k \frac{k^4 n^4}{\alpha^4 l^4}$$

$$W = \sum_{k=1}^n \dots - a_k \left[2 \frac{l}{k n} + \alpha l \frac{d}{dt} \frac{\alpha}{l^2} \frac{k n}{l} \right] - \frac{l}{4} \sum_{k=1}^n a_k \frac{k^4 n^4}{l^4} \rightarrow 0$$

$$\leq a_k \left[2 \left(\frac{l}{k n} - \frac{k^2 n^2}{\alpha^2 l^2} - \frac{l}{\alpha} \right) + \frac{l}{\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{k n}{l} \right)^3 \cdot \frac{(k n)^2}{(l)^2} \right] + \frac{l}{4} \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{k^4 n^4}{\alpha^4 l^4} - \frac{k^4 n^4}{l^4} \right) \rightarrow 0$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2 n^2}{\alpha^2 l^2} + \dots + \left[\dots \right] \int_0^1 P a_k$$

führt tykko ryhtymänsi dersi k: $\frac{d}{dt} \frac{\alpha}{l^2} = 1$

$$\sum_{k=1}^n \frac{l}{\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\alpha}{l^2} \frac{k n}{l} = \frac{2}{\alpha} \frac{k n}{l}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{l}{\alpha} a_k \left[\frac{k n}{l \alpha} - \frac{k n}{l \alpha} - \frac{l}{\alpha} \right] > 0$$

weirneht: $\sum_{k=1}^n \frac{l}{k n} a_k \left[1 - \frac{\alpha}{l} \frac{d}{dt} \frac{\alpha}{l^2} \left(\frac{k n}{l} \right)^2 \right] = 0$

15 vms $\frac{d}{dt} \frac{\alpha}{l^2} = 1$

Wannuk $\sum_{k=1}^n \frac{k n}{\alpha^2 l} a_k = 0$

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} \frac{1}{\left(\frac{k n}{l} \right)^2 - \alpha} = 0$$

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{l}{k n} \left[1 - \frac{k^2 n^2}{\alpha^2 l^2} - \frac{\alpha}{l} \frac{d}{dt} \frac{\alpha}{l^2} \left(\frac{k n}{l} \right)^2 \right] = 0$$

$$\sum_{k=1,3,5,\dots}^n a_k \frac{l}{k n} \left(1 - \frac{k n}{\alpha l} \right) \left[1 + \frac{\alpha}{l} \frac{d}{dt} \frac{\alpha}{l^2} \frac{(k n)^2}{\left(1 - \frac{k n}{\alpha l} \right)^2} \right] = 0$$

15 vms $\frac{d}{dt} \frac{\alpha}{l^2} = 1$

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{l}{k n}$$

$$S l > \sum_{k=1}^n a_k \frac{k n}{l} \left[\left(\frac{k n}{\alpha l} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\leq \frac{a_k}{\left(\frac{k n}{l} \right)^2 - \alpha} \left[-2 \frac{k^4 n^3}{\alpha^2 l^3} + 2 \frac{k^2 n^2}{l} + \frac{2}{\alpha^2} \left(\frac{k n}{l} \right)^3 - 2 \frac{k^2 n^2}{l} + 2 \alpha \frac{l}{n} \right] \geq 0$$

88

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \left(x - \frac{1}{2} \right) dx &= \cancel{\frac{1}{2} \ln \left(x - \frac{1}{2} \right)} + \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \left(x - \frac{1}{2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln y dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \ln y dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 + \ln 2y) dy = \frac{1}{2} \left(y + \frac{\ln 2y}{2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln \frac{1}{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\ln \frac{1}{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \left(x - \frac{1}{2} \right) dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln \frac{1}{2}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\ln \frac{1}{2}}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{4} \end{aligned}$$

$$y = \frac{\rho g h}{2P} \left[\frac{l^2}{4} - \xi^2 - \frac{l}{\alpha} \frac{\cos \alpha \xi - \cos \frac{\alpha l}{2}}{\sin \frac{\alpha l}{2}} \right] + \sum a_k \cos k \xi$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{\rho g h}{2P} \left[-2\xi + \frac{l \sin \alpha \xi}{\sin \frac{\alpha l}{2}} \right] + \sum k a_k \sin k \xi$$

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} = \frac{\rho g h}{2P} \left[-2 + \alpha l \frac{\cos \alpha \xi}{\sin \frac{\alpha l}{2}} \right] - \alpha^2 \sum k^2 a_k \cos k \xi$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \sin^2 k \xi d\xi = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 k \varphi d\varphi = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2k\varphi}{4k} \right] d\varphi = \frac{1}{2\alpha} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4\alpha} = \int_0^{\frac{l}{2}} \cos^2 k \xi d\xi$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \xi \sin k \xi d\xi = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin k \varphi d\varphi$$

$$y = \frac{\rho g h}{2P} \left[\frac{l^2}{4} - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l}{\alpha} \frac{\cos \alpha \left(x - \frac{l}{2}\right) - \cos \frac{\alpha l}{2}}{\sin \frac{\alpha l}{2}} \right] + \sum a_k \cos \frac{k\pi x}{l}$$

| | |
|-------------------|-------------------|
| $x=0$ | $x=l$ |
| $y=0$ | $y=0$ |
| $\frac{dy}{dx}=0$ | $\frac{dy}{dx}=0$ |

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho g h}{2P} \left[-2x + l + \frac{l}{\alpha} \frac{\sin \alpha \left(x - \frac{l}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha l}{2}} \right] + \frac{\pi}{l} \sum k a_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\rho g h}{2P} \left[-2 + \alpha l \frac{\cos \alpha \left(x - \frac{l}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha l}{2}} \right] - \frac{\pi^2}{l^2} \sum k^2 a_k \cos \frac{k\pi x}{l}$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{k\pi} \int_0^{k\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{l}{2k\pi} k\pi = \frac{l}{2} = \int_0^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx$$

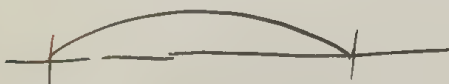
$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \alpha \left(x - \frac{l}{2}\right) \cos \frac{k\pi x}{l} dx &= \int_0^l \left[\sin \left[\alpha \left(x - \frac{l}{2}\right) + \frac{k\pi x}{l} \right] + \sin \left[\alpha \left(x - \frac{l}{2}\right) - \frac{k\pi x}{l} \right] \right] dx \\ &= \frac{\cos \left[\alpha \left(x - \frac{l}{2}\right) + \frac{k\pi x}{l} \right]}{\alpha + \frac{k\pi}{l}} \Big|_0^l + \frac{\cos \left[\alpha \left(x - \frac{l}{2}\right) - \frac{k\pi x}{l} \right]}{\alpha - \frac{k\pi}{l}} \Big|_0^l = \frac{\cos \alpha \frac{l}{2} - \cos \left(\frac{\alpha l}{2} + k\pi \right)}{\alpha + \frac{k\pi}{l}} + \frac{\cos \frac{\alpha l}{2} - \cos \left(\frac{\alpha l}{2} - k\pi \right)}{\alpha - \frac{k\pi}{l}} \\ &= \cos \frac{\alpha l}{2} \left\{ \frac{1 - (-1)^k}{\alpha + \frac{k\pi}{l}} + \frac{1 - (-1)^k}{\alpha - \frac{k\pi}{l}} \right\} = \cos \frac{\alpha l}{2} \frac{[1 - (-1)^k]}{\alpha^2 - \frac{k^2 \pi^2}{l^2}} \end{aligned}$$

$$\int_0^l \cos \alpha \left(x - \frac{l}{2}\right)$$

Ping Pong

$$x=0 \begin{cases} y=0 \\ \frac{dy}{dx}=0 \end{cases}$$

$$y_0 = 5 \left[\frac{l^2}{6} - \frac{2}{\alpha^2} \right]$$



$$y = 5 \left[lx - x^2 - \frac{2 \left[\cos \alpha \left(x - \frac{l}{2} \right) - \cos \frac{\alpha l}{2} \right]}{\alpha^2 \cos \frac{\alpha l}{2}} \right] + \sum a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 \left[l - 2x + \frac{2 \left[\sin \alpha \left(x - \frac{l}{2} \right) \right]}{\alpha \cos \frac{\alpha l}{2}} \right] + \sum a_n \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5 \left[-2 + \frac{2 \cos \alpha \left(x - \frac{l}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha l}{2}} \right] + \sum a_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$U = \frac{E_0}{2} \left[\sum -4 a_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left[(-1)^n - 1 \right] \frac{l}{n\pi} - \frac{4 a_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \cos \frac{n\pi}{2} \left[\frac{1 - (-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - \alpha^2} \right] \right] + \sum \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 a_n^2 \frac{l}{2}$$

$$= \frac{E_0}{2} \left\{ 4 \sum \left[1 - (-1)^n \right] a_n \left[\frac{l}{n\pi} - \frac{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^3}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - \alpha^2} \right] + \frac{l}{2} \sum a_n^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \right\}$$

$$V = 2P \left\{ \sum \left[1 - (-1)^n \right] \frac{a_n}{n\pi} \right\}$$

$$W = \frac{P}{2} \left\{ 4 \sum a_n \left[1 - (-1)^n \right] \left[\frac{l}{n\pi} + \frac{\frac{n\pi}{l}}{\alpha^2 - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2} \right] + \sum a_n^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{P}{2} \left\{ 4 \sum a_n \left[1 - (-1)^n \right] \left\{ \underbrace{\frac{l}{n\pi} + \frac{\frac{n\pi}{l}}{\alpha^2 - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2}}_{\frac{\alpha^2 \frac{l}{n\pi}}{\alpha^2 - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2}} \right\} + \frac{l}{2} \sum a_n^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{P}{E_0} = \alpha^2$$

$$U = \frac{E_0}{2} \left\{ 4 \sum \left[1 - (-1)^n \right] a_n \frac{-\alpha^2 \frac{n\pi}{l}}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - \alpha^2} + \frac{l}{2} \sum a_n^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \right\}$$

$$U+V = \frac{P}{2} \left\{ 4 \sum \left[1 - (-1)^n \right] a_n \left[\frac{-\frac{n\pi}{l}}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - \alpha^2} + \frac{l}{2\alpha^2} \right] + \frac{l}{2\alpha^2} \sum a_n^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \right\}$$

$$= \frac{n\pi}{l} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - \alpha^2} \right\}$$

$$\frac{-\alpha^2 \frac{l}{n\pi}}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - \alpha^2}$$

$$\left\{ = W - \frac{lP}{4} \sum a_n^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right\}$$

$$U+V-W = 0$$

$$U+V = \frac{lP}{4} \sum a_n^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{l} - 1 \right)$$

Stabil & res. jücker ≥ 0

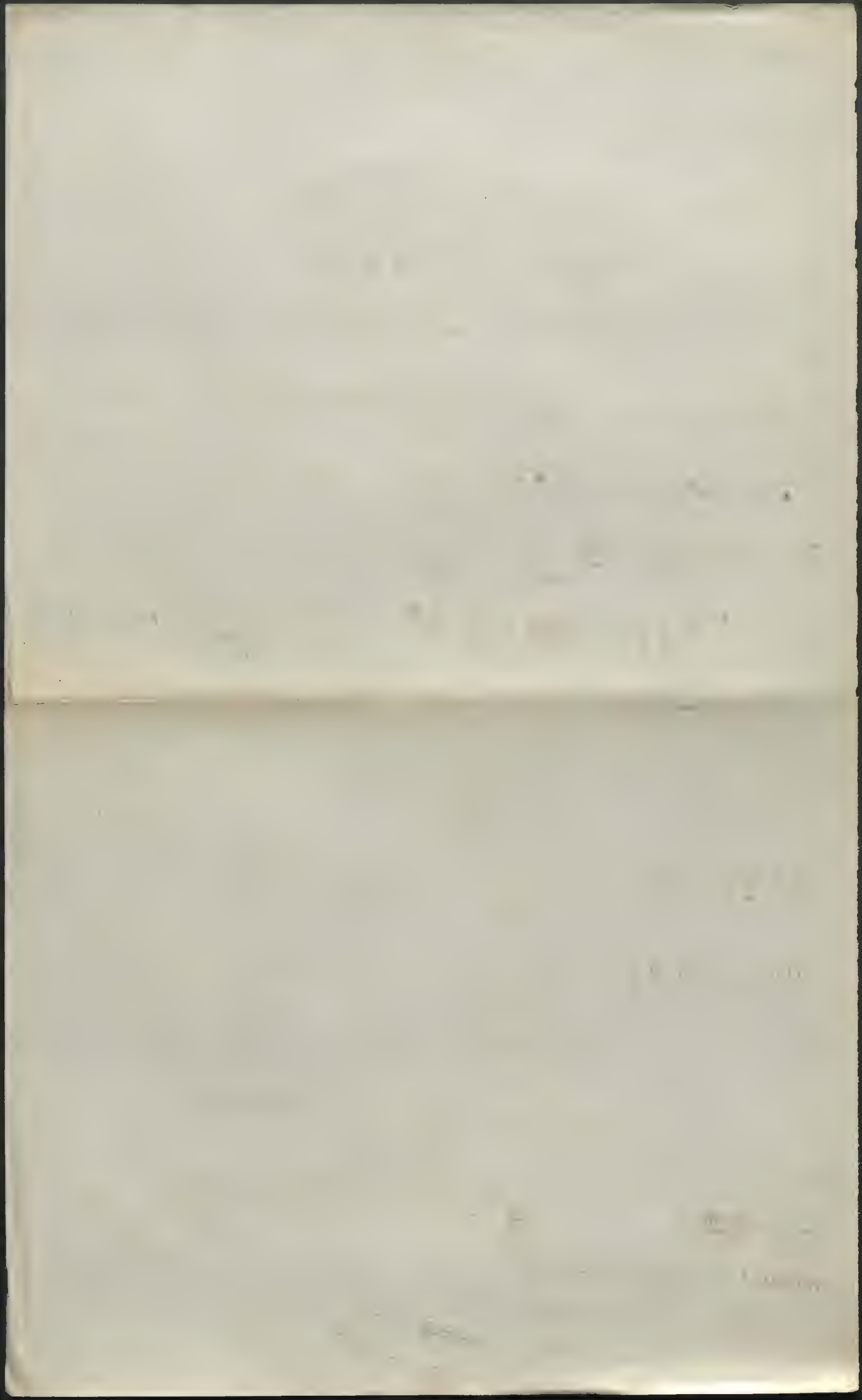
$$\frac{n\pi}{\alpha l} > 1$$

$\alpha l \leq n$
tj. $\alpha l \leq n$

nimmst du
jederzeit $W = \frac{lP}{4} \sum a_n^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2$
 $\sum a_n = \frac{lP}{4} \sum a_n^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - 1$
 $U+V = \frac{lP}{4} \sum a_n^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{l} - 1 \right)$
jederzeit $U+V \geq 0$

$$U+V = \frac{lP}{4} \sum a_n^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2$$

$$\left(\frac{l}{n} \right)^2 \leq \frac{E_0}{P}$$



$$y = \int \left[x^2 + lx - \frac{1}{\alpha} \frac{\cos \alpha(x - \frac{l}{2}) - \cos \frac{\alpha l}{2}}{\alpha} \right]$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\alpha l}{2} = \frac{\alpha l}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\alpha l}{2} = \frac{2}{\alpha l}$$

$$\cos \alpha x \frac{d}{dx} \frac{\alpha l}{2} + \alpha x - \frac{d}{dx} \frac{\alpha l}{2}$$

$$y = \int \left[lx - x^2 + \frac{2}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha x) - \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \right]$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\frac{\sin k\pi x}{l} - \frac{k}{\pi} \frac{\sin(k\pi) \pi x}{l} \right] \quad \text{spinele varietati} \quad y = \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad x=l$$

$$\int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{\pi} \int_0^{\pi} \sin k\varphi d\varphi = -\frac{l}{\pi k} (\cos k\pi - 1) = -\frac{l}{\pi k} [(-1)^k - 1]$$

$$- \frac{k}{\pi} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

$$= +\frac{l}{\pi} \frac{k}{k+2} [(-1)^k - 1]$$

$$= -\frac{l}{\pi} \frac{k}{k+2} [(-1)^k - 1] \cdot \frac{2}{k\pi}$$

$$\frac{dy}{dx} = \int \left[l - 2x + \frac{1}{\alpha} \frac{\sin \alpha(x - \frac{l}{2})}{\alpha} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{k\pi}{l} \left[\cos \frac{k\pi x}{l} - \cos \frac{(k\pi) \pi x}{l} \right]$$

$$\int_0^l x \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} x \cos k\varphi d\varphi = \left(\frac{l}{\pi k} \right) \int_0^{\pi} \varphi \cos \varphi d\varphi = [\varphi \sin \varphi + \cos \varphi]_0^{\pi} = \left(\frac{l^2}{\pi k} \right) [(-1)^k - 1]$$

$$= \frac{l^2}{(k+2)} [(-1)^k - 1]$$

$$\int_0^l x \sin \frac{(k\pi) \pi x}{l} dx$$

$$\int_0^l \sin \alpha(x - \frac{l}{2}) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\sin \left[\alpha(x - \frac{l}{2}) + \frac{k\pi x}{l} \right] + \sin \left[\alpha(x - \frac{l}{2}) - \frac{k\pi x}{l} \right] \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos \left[\alpha(x - \frac{l}{2}) + \frac{k\pi x}{l} \right]}{\alpha + \frac{k\pi}{l}} \right|_0^l + \frac{\cos \left[\alpha(x - \frac{l}{2}) - \frac{k\pi x}{l} \right]}{\alpha - \frac{k\pi}{l}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos(-\frac{\alpha l}{2}) - \cos(\frac{\alpha l}{2} + k\pi)}{\alpha + \frac{k\pi}{l}} + \frac{\cos(-\frac{\alpha l}{2}) - \cos(\frac{\alpha l}{2} - k\pi)}{\alpha - \frac{k\pi}{l}} \right\} = \frac{\cos \frac{\alpha l}{2}}{2} \left[\frac{1 - (-1)^k}{\alpha + \frac{k\pi}{l}} + \frac{1 - (-1)^k}{\alpha - \frac{k\pi}{l}} \right]$$

$$= \alpha \cos \frac{\alpha l}{2} \frac{1 - (-1)^k}{\alpha^2 - (\frac{k\pi}{l})^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int \left[-2 + \alpha l \frac{\cos \alpha(x - \frac{l}{2})}{\alpha} \right] - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{k\pi x}{l} - \frac{k(k\pi) \pi^2}{l^2} \sin \frac{(k\pi) \pi x}{l} \right]$$

$$\int_0^l \cos \alpha(x - \frac{l}{2}) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\sin \left[\frac{k\pi x}{l} + \alpha(x - \frac{l}{2}) \right] + \sin \left[\frac{k\pi x}{l} - \alpha(x - \frac{l}{2}) \right] \right] dx$$

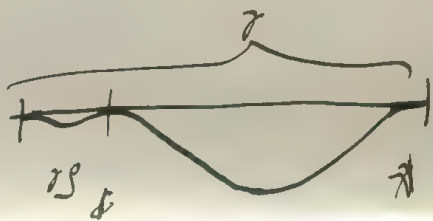
$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos \left[\frac{k\pi x}{l} + \alpha(x - \frac{l}{2}) \right]}{\frac{k\pi}{l} + \alpha} \right|_0^l + \frac{\cos \left[\frac{k\pi x}{l} - \alpha(x - \frac{l}{2}) \right]}{\frac{k\pi}{l} - \alpha} \right\} = \frac{\cos \frac{\alpha l}{2}}{2} \frac{1 - (-1)^k}{\frac{k\pi}{l} + \alpha} + \frac{\cos \frac{\alpha l}{2}}{2} \frac{1 - (-1)^k}{\frac{k\pi}{l} - \alpha}$$

$$= \frac{\cos \frac{\alpha l}{2}}{2} \left\{ \frac{1 - (-1)^k}{\frac{k\pi}{l} + \alpha} + \frac{1 - (-1)^k}{\frac{k\pi}{l} - \alpha} \right\} = \frac{\cos \frac{\alpha l}{2}}{2} \frac{k\pi}{l} \frac{1 - (-1)^k}{(\frac{k\pi}{l})^2 - \alpha^2}$$

$$\int_0^l x \cos \alpha(x - \frac{l}{2}) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left[x \sin \left[\frac{k\pi x}{l} + \alpha(x - \frac{l}{2}) \right] + x \sin \left[\frac{k\pi x}{l} - \alpha(x - \frac{l}{2}) \right] \right] dx$$

$$\int_0^l x \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{\pi k} \int_0^{\pi} x \sin k\varphi d\varphi = \frac{l^2}{\pi k} \int_0^{\pi} \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{l^2}{\pi k} [-\varphi \cos \varphi + \sin \varphi]_0^{\pi} = \frac{l^2}{\pi k} [0 + 1 - 0 + 0] = \frac{l^2}{\pi k}$$

$$\frac{k\pi}{l} \left[x \cos \alpha(x - \frac{l}{2}) + x \sin \alpha(x - \frac{l}{2}) \right] = \frac{k\pi}{l} \left[x \cos \alpha(x - \frac{l}{2}) + x \sin \alpha(x - \frac{l}{2}) \right] = \frac{k\pi}{l} \left[x \cos \alpha(x - \frac{l}{2}) + x \sin \alpha(x - \frac{l}{2}) \right] = \frac{k\pi}{l} \left[x \cos \alpha(x - \frac{l}{2}) + x \sin \alpha(x - \frac{l}{2}) \right]$$



Wannke's punkt Φ :
 $P_1 = P_2$

$$W = f(s, x) \quad f(s', x) = f(s + \alpha s, x - \alpha x) + f(s - \alpha s, x + \alpha x) = f(s, x)$$

$$f(s, x) + \frac{\partial f}{\partial s} \alpha s - \frac{\partial f}{\partial x} \alpha x + f(s, x) = f(s, x)$$

$$\alpha s = \frac{\partial f}{\partial x} \alpha x - f(s, x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s}$$

$$f(s, x) = \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s}$$

$$\alpha s = \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s}$$

$$(U+V) - \alpha s + (U+V) - \alpha s \geq 0$$

$$f(s, x) - \alpha s + f(s, x) + f(s, x) - f(s, x) \geq 0$$

$$[-\alpha \frac{\partial f}{\partial s} + f(s, x)] \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} [f(s, x) - f(s, x)] \geq 0$$

$$\alpha \left[\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s} \right] + \frac{\partial f}{\partial s} \left[f(s, x) - \frac{\partial f}{\partial s} f(s, x) \right] \geq 0$$

$$f(s, x) = -\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{\partial f}{\partial s}$$

$$f = -\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{\partial f}{\partial s}$$

5 get more information
 go to source. E. E. to source. This S (with arrow)
 more info, this info, more info, more info

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \quad \int \frac{\alpha^2 l^4}{n^3} > a_1^2 + 8a_2^2 + 27a_3^2$$

$$-a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0 \quad 7 - a_1 + 8a_2 - 27a_3$$

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = -3a_3$$

$$\int \frac{\alpha^2 l^4}{n^3} = 24a_3$$

$$\frac{P}{n} \left\{ 5 \left[+8a_3 \left(\frac{l}{3n} + \frac{3n}{\alpha^2 l} \right) \right] + \frac{l}{2} \left\{ a_1^2 \left[\left(\frac{n}{l} \right)^4 - 1 \right] + a_2^2 \left[\left(\frac{l}{n} \right)^4 - 1 \right] + a_3^2 \left[\left(\frac{n}{l} \right)^4 - 1 \right] \right\} \right\} > 0$$

$$\frac{l}{2} \left\{ a_1^2 \left[\left(\frac{n}{l} \right)^4 - 1 \right] + a_2^2 \left[\left(\frac{l}{n} \right)^4 - 1 \right] + a_3^2 \left[\left(\frac{n}{l} \right)^4 - 1 \right] \right\} + a_3$$

$$8 \int \left(\frac{l}{3n} + \frac{3n}{\alpha^2 l} \right) + \frac{l a_3}{2} \left\{ \left(\frac{3n}{l} \right)^4 - \left(\frac{n}{l} \right)^4 + 9 \left[\left(\frac{n}{l} \right)^4 - \left(\frac{n}{l} \right)^4 \right] \right\}$$

$$90 \left(\frac{n}{l} \right)^4 - 18 \frac{n^2}{l^2} > 0$$

85

$$\left| 8 \left(\frac{l}{3n} + \frac{3n}{\alpha^2 l} \right) \right| > \frac{l}{24} \frac{\alpha^2 l^4}{n^3} \left[45 \left(\frac{n}{l} \right)^4 - 9 \left(\frac{n}{l} \right)^4 \right]$$

$$= \frac{1}{24} \left[45 \frac{n l}{n} - 9 \frac{\alpha^2 l^3}{n} \right]$$

$$\frac{64}{n^3} \left[1 + \frac{9n}{\alpha^2 l} \right] > 45 \left[1 - \frac{\alpha^2 l^2}{5n^2} \right]$$

$$1 + \frac{9n}{\alpha^2 l} > 7 \left[1 - \frac{\alpha^2 l^2}{5n^2} \right]$$

$$\alpha l \neq n \sqrt{5}$$

$$\neq 2n$$

$$\frac{U+W}{g} = \frac{P}{2} \left[-4 \frac{l}{\alpha} + \frac{l^3}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{l^2}{2} \frac{dy}{d\xi} \right] + \frac{2}{3} l^3 - 8 \frac{l}{\alpha} + 4 \frac{l^2}{\alpha} \frac{dy}{d\xi}$$

Along x-axis $M = \rho g h l$

$$-2 g l + g l + \rho g h x = \frac{\rho g h l}{E \theta}$$

$$g = \frac{\rho g h}{E \theta}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{P}{E \theta} \frac{dy}{dx} + \frac{\rho g h}{E \theta} (x-l) = 0$$

$$\frac{d^3 y}{d\xi^3} + \frac{P}{E \theta} \frac{dy}{d\xi} + \frac{\rho g h}{E \theta} \xi = 0$$

$$y = A \sin \left(\xi \sqrt{\frac{P}{E \theta}} + \pi \right) + D \xi + C$$

$$\frac{2P}{E \theta} D + \frac{\rho g h}{E \theta} = 0$$

$$D = - \frac{\rho g h}{2P}$$

$$y = A \left[\sin \left(\xi \sqrt{\frac{P}{E \theta}} + \pi \right) - \sin \xi \right] - \frac{\rho g h}{2P} \xi^2$$

$$\sin(\alpha l + \pi) - \sin \pi - g l^2 = 0$$

$$\int \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{E \theta} \int \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\rho g h}{E \theta} \int x \frac{dy}{dx} = \frac{M}{E \theta} \frac{dy}{dx} \Big|_0^l$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \quad \left[x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^l$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + \alpha^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 4 g \left[x \frac{dy}{dx} - y \right] = \frac{M}{E \theta} \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0$$

$$\int \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + \alpha^2 \int \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx + 4 g \int \left\{ x \frac{dy}{dx} - y \right\} dx - \frac{M}{E \theta} \int \frac{dy}{dx} = l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0$$

$$y = \frac{\rho g h}{2P} \left[\frac{l^2}{4} \xi + \frac{l}{\alpha} \frac{\cos \alpha \xi - \cos \alpha \frac{l}{2}}{\sin \frac{\alpha l}{2}} \right] \quad \alpha = \sqrt{\frac{P}{EO}}$$

$$U = \frac{EO}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad V = 2\rho g h \int_0^{\frac{l}{2}} y dx \quad W = P \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} y dx = \frac{\rho g h}{2P} \left[\frac{l^3}{8} - \frac{l^3}{3 \cdot 4} + \frac{l}{\alpha^2} \frac{\sin \alpha \frac{l}{2}}{\sin \frac{\alpha l}{2}} + \frac{l^2}{2\alpha} \right] = \frac{\rho g h}{2P} \left[\frac{l^3}{12} + \frac{l^2}{2\alpha} - \frac{l}{\alpha^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho g h}{2P} \left[-2\xi + \frac{l}{\alpha} \frac{\sin \alpha \xi}{\sin \frac{\alpha l}{2}} \right] \quad \frac{l}{4} - l \cdot \sin \frac{\alpha l}{2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \left(\frac{\rho g h}{2P} \right)^2 \left[4\xi^2 - \frac{4\xi l \sin \alpha \xi}{\sin \frac{\alpha l}{2}} + \frac{l^2 \sin^2 \alpha \xi}{\sin^2 \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$\int \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \left(\frac{\rho g h}{2P} \right)^2 \left[\frac{4}{3} \left(\frac{l}{2} \right)^3 - \frac{4l}{\sin \frac{\alpha l}{2}} \left[-\xi \cos \alpha \xi + \frac{1}{\alpha} \sin \alpha \xi \right] + \frac{l^2}{2 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}} \left(\xi - \frac{\sin 2\alpha \xi}{2\alpha} \right) \right]$$

$$= \left(\frac{\rho g h}{2P} \right)^2 \left[\frac{l^3}{6} + \frac{2l^2 \cos \frac{\alpha l}{2}}{\alpha \sin \frac{\alpha l}{2}} - \frac{4l}{\alpha^2} + \frac{l^3}{4 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}} - \frac{l^2}{2\alpha} \frac{\sin 2\alpha \frac{l}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$= \left(\frac{\rho g h}{2P} \right)^2 \left[\frac{l^3}{6} + \frac{3l^2}{4\alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} + \frac{l^3}{4 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}} - \frac{4l}{\alpha^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho g h}{2P} \left[-2 + \frac{\alpha l \cos \alpha \xi}{\sin \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$\int \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \left(\frac{\rho g h}{2P} \right)^2 \left[4 \frac{l}{2} - \frac{4\alpha l}{\sin \frac{\alpha l}{2}} + \frac{\alpha^2 l^2}{\sin^2 \frac{\alpha l}{2}} \left(\frac{l}{2} + \frac{\sin \alpha l}{2\alpha} \right) \right]$$

$$= \left(\frac{\rho g h}{2P} \right)^2 \left[-2l + \frac{\alpha^2 l^3}{4 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}} + \frac{\alpha l^2}{2} \cot \frac{\alpha l}{2} \right]$$

$$U+V-W = EO \left(\frac{\rho g h}{2P} \right)^2 \left[-2l + \frac{\alpha^2 l^3}{4 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}} + \frac{\alpha l^2}{2} \cot \frac{\alpha l}{2} \right]$$

$$+ 4 \left(\frac{\rho g h}{2P} \right)^2 EO \left[\frac{l^3}{12} - l + \frac{\alpha l^2}{2} \cot \frac{\alpha l}{2} \right]$$

$$- EO \left(\frac{\rho g h}{2P} \right)^2 \left[\frac{\alpha^2 l^3}{6} - 4l + \frac{3l^2}{4\alpha} \cot \frac{\alpha l}{2} + \frac{l^3 \alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$= \left(\frac{\rho g h}{2P} \right)^2 EO \left\{ 2l + \frac{\alpha^2 l^3}{6} + \frac{7}{4} l^2 \alpha \cot \frac{\alpha l}{2} \right\}$$

$$l \left\{ 2 + \frac{7}{4} \alpha l \cot \frac{\alpha l}{2} + \frac{\alpha^2 l^2}{6} \right\}$$

$$l = 2 \quad \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \cdot 2 \cot \frac{2}{2} + \frac{2^2}{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \frac{7}{4} \cot \frac{2}{2} - \frac{7}{8} \frac{2}{\sin^2 \frac{2}{2}} + \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{-\cos \frac{2}{2} + \frac{2}{\sin^2 \frac{2}{2}}}{2 \sin \frac{2}{2}} = \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{21} = \frac{2 - \sin 2}{2 \sin^2 \frac{2}{2}} = \frac{2 - \sin 2}{1 - \cos 2}$$

$$P = \alpha^2 EO$$

Handwritten calculations and diagrams on the right side of the page, including a diagram of a beam and various algebraic steps.

$$W = \frac{1}{2} \left\{ \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} + \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} - \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} - \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} + \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} + \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} \right\}$$

$$+ \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} \leq \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} + \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} \leq \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2}$$

$$W - W > (W - W)_0$$

$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} \leq \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} + \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} - \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} \leq \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2}$$

$$- \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} - \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} \leq \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} > 0$$

$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} \leq \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2}$$

$$\left\{ \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} \leq \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} + \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} \right\} > 0$$

Remark:

$$\frac{d^2}{d^2} = \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} + \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} > 0$$

$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} \leq \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} + \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2}$$

$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} \leq \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} + \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2}$$

$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} \leq \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} + \frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2}$$

$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} > 0$$

$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} > 0$$

$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} > 0$$

$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} > 0$$

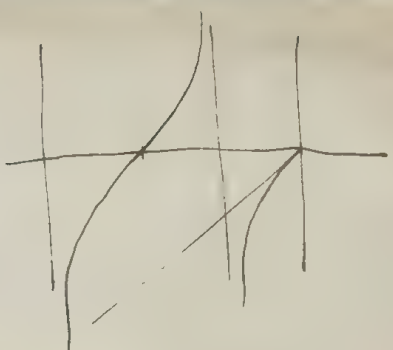
$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} > 0$$

$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} > 0$$

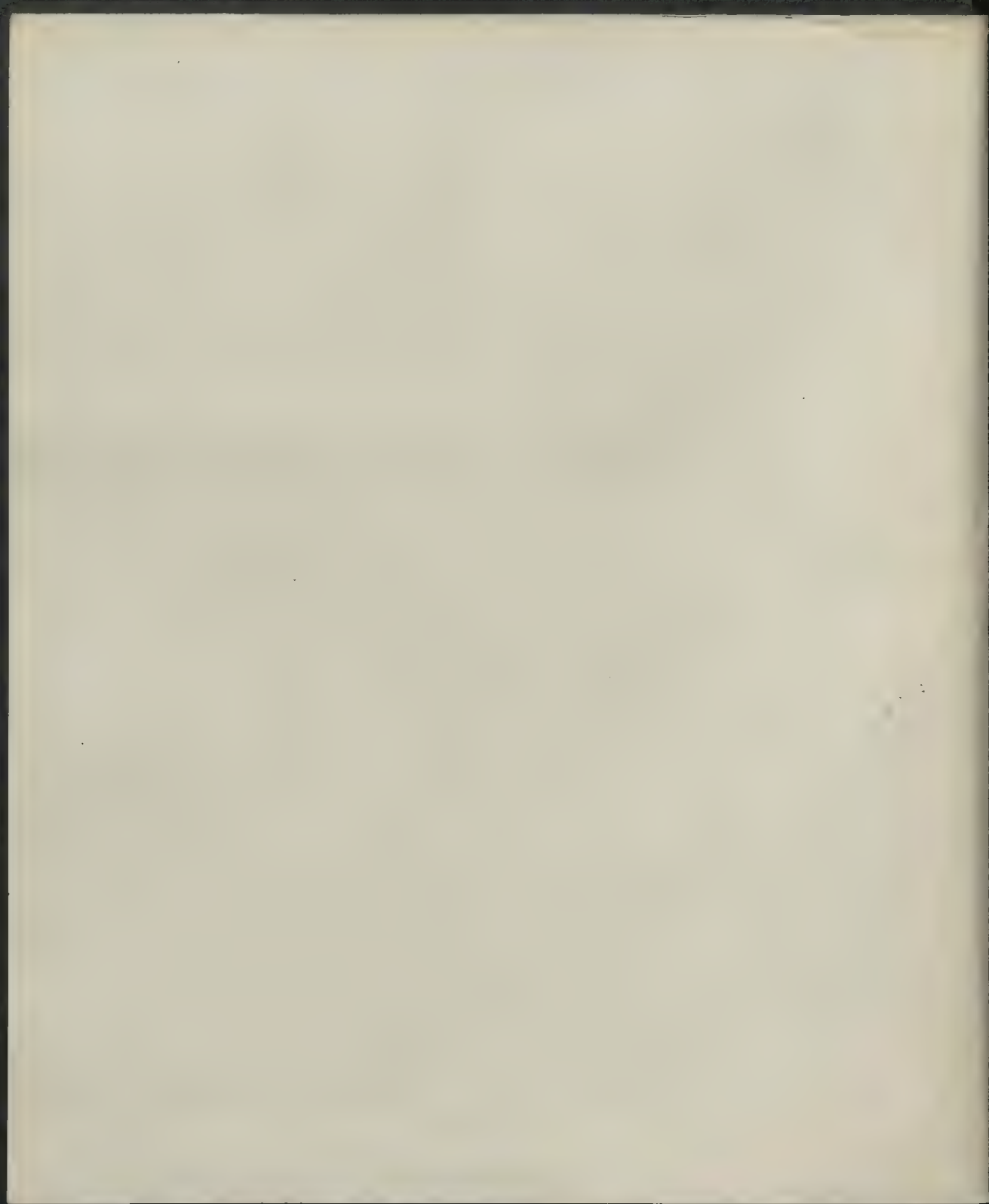
$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} > 0$$

$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} > 0$$

$$\frac{5}{2} \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{d^2} > 0$$



Handwritten notes and scribbles at the bottom left of the page.



infolgedessen, das Gesamtvolumen von der Anordnung abh. (Bose), oder ob dabei spezielle molekulare Kräfte ins Spiel treten (Lehmann¹⁾).

5. Dagegen läßt sich die Theorie quantenmechanisch, z. B. für den Fall entwickeln, wo äußere magnetische Richtkraft h auf Teilchen aus paramagnetischer oder diamagnetischer Substanz wirkt. Sind es z. B. verlängerte Rotationsmoleküle vom Volumen V , Exzentrizität η (als vorausgesetzt), so suchen sich dieselben in den magnetischen Kraftlinien einzustellen, was mit einem Drehungsmoment

$$\frac{4}{5} \pi \eta^2 V \kappa^2 h^2 \sin \Theta \cos \Theta.$$

Molekularbewegungen wirken dieser Parallelisierung entgegen, und nach Formel (4) findet beispielsweise leicht, daß die relative Abweichung der parallelen und der normalen Komponenten (bezogen auf gleiche Körperwinkel)

$$\text{verhält wie } 1 : \epsilon = \frac{4}{5} \pi \eta^2 V \kappa^2 h^2 \frac{N}{H \Theta}.$$

Setzt man Zahlenwerte ein, so sieht man, daß sich durch Wahl geeigneter flüssiger Medien (Eisenchloridlösung), suspendierter Teilchen (Feldstärken leicht alle möglichen Fälle realisieren lassen, sowohl fast vollständige Parallelisierung (Sättigung) wie auch ganz unregelmäßige Anordnung.

Diese Erscheinungen ließen sich gewiß leicht mikroskopisch beobachten und messend verfolgen, ein indirekt darauf beruhendes Phänomen ist übrigens schon seit einiger Zeit bekannt, nämlich die Erscheinungen der magnetischen Doppelbrechung und des magnetischen Dichroismus, welche an kolloidalen Eisenhydroxyden (Majorana, Cotton und Mouton) oder an in Flüssigkeiten suspendierten Kristallkörnchen (Meslin, Chaudier) auftreten; kürzlich haben Zeeman und Hoogenboom die gleichen Phänomene an Salmiaknebeln bei Erzeugung eines elektrischen Feldes nachgewiesen. In diesen Fällen meist eine dem Quadrat des elektrischen bzw. magnetischen Kraft proportionalen Wirkung gefunden wurde, zeigt, daß der Zustand von vollständiger Parallelrichtung der Kriställchen sehr weit entfernt war. Natürlich hängt ja die ganze moderne, namentlich von Zeeman begründete Theorie des Diamagnetismus, sowie der von Cotton und Mouton an homogenen Flüssigkeiten beobachteten Erscheinungen hiermit zusammen, da ja auch in diesen das Boltzmannsche $e^{-h\nu/kT}$ -Gesetz die

(und ebenso auch der Quarzfaden) wird eine Art Brownscher Bewegung um die Gleichgewichtslage herum ausführen, deren Ampli-

tuden innerhalb des Bereichs der mittleren Ablenkung nach den früher erwähnten Formeln für gewöhnliche Brownsche Rotationsbewegung geschätzt werden können. In stark verdünnten Gasen, wo die Reibungswiderstände proportional der Gasdichte sind, wird die Geschwindigkeit der Schwankungen mit Verdünnung zunehmen und kann vielleicht als Maß der Verdünnung dienen. An diese letzten zwei Beispiele ließen sich auch interessante theoretische Spekulationen anknüpfen über die durch Endlichkeit der Wirkungsquanten hervorgerufenen Modifikationen, doch scheint sich derzeit keine Aussicht darzubieten, um denselben eine experimentell direkt greifbare Gestalt zu verleihen.

§ 18. Insoweit haben wir uns ausschließlich mit Schwankungen der Koordinaten eines Systems beschäftigt. In ähnlicher Weise könnte man auch an der Hand der Gleichung (3) die Schwankungen der Energie oder der Geschwindigkeiten der einzelnen Koordinaten untersuchen. Die mittleren Energieschwankungen sind eigentlich unter Umständen ganz beträchtlich, sie entsprechen z. B. für 1 cm³ Wasser einer Verschiebung des Schwerpunktes in der Vertikalrichtung von der Größenordnung eines Millimeters, doch ist ein experimenteller Nachweis derselben angesichts der Ungenauigkeit kalorimetrischer Messungen ganz aussichtslos.

§ 19. Besser steht es mit den Geschwindigkeitsschwankungen. Da die kinetische Energie eine quadratische Funktion der Impulse ist, und da diese im Ausdruck für die Zustandswahrscheinlichkeit mit den Koordinaten gleichberechtigt auftreten, sieht man ohne weiteres, analog wie in (8), daß für die Geschwindigkeit jeder Koordinatenbewegung das Fehlergesetz gilt, und daß ihre mittlere kinetische Energie gleich ist:

$$\frac{1}{2} M \bar{g}^2 = \frac{1}{2} \frac{H \Theta}{N}.$$

Das ist einfach das Maxwell'sche Verteilungsgesetz der Molekulargeschwindigkeiten und Äquipartitionsgesetz der Energie.

Durch direkte Beobachtung läßt sich die Geschwindigkeit natürlich nicht messen, obwohl ihre Größe z. B. bei mikroskopisch kleinen Teilchen sonst ganz geeignet wäre, denn sie ändert unaufhörlich ihre Richtung, und man sieht nur die geometrische Resultante der zahlreichen, außerordentlich kurzen mittleren Weglängen: als „Brownsche Bewegung“. Wohl aber kann in indirekter Weise die Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle eines sehr verdünnten leuchtenden Gases kontrolliert werden; da sie zufolge des Doppellerschen Prinzips ein genaues Widerbild finden muß in der Intensitätsverteilung im Bereiche einer jeden Spektrallinie.

Bekanntlich hat schon Michelson Messungen der Breite von Spektrallinien ausgeführt,

1) Von Prof. Pockels wurde ich auf eine interessante Mitteilung Mauguins, C. R. C., 1912, aufmerksam gemacht, wonach sich die zeitliche Veränderung der Warmeordnung bei geeigneter Anordnung durch ein Mikroskop erkennen gibt, welches im magnetischen Feld verschwindet.

2) Cotton und Mouton, C. R. 142, 141, 317, 1906; Meslin, C. R. 186, 888, 930, 1059, 1305, 1438, 1641, 182, 1903; J. Chaudier, C. R. 137, 248, 1903; Zeeman und Hoogenboom, Versl. Ak. Wet. 170, 921, 1911/12; Beibl. 36, 741, 1912.

Los Angeles

Amesbury

welche man vielleicht kurz: „Dicke der Sedimentationsschichte“ nennen könnte.

Selbst wenn ein Teilchen auf irgendeine Weise zum Gefäßboden gebracht und dort gelassen wird, steigt es im allgemeinen, entgegen der Schwere, eine Strecke von selbst empor, und zwar gemäß der aus (54) für $\chi_0 = 0$ folgenden Formel:

$$W(\chi_0, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{(x+c)^2}{4 D t}}$$

$$+ \frac{c}{\sqrt{D \pi}} e^{-\frac{cx}{D}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4 D t}} dz \quad (57)$$

deren Werte für wachsende Zeiten t durch die Kurven 1, 2, 3, 4 der Fig. 3. sinnvollt werden:

Der durchschnittliche Arbeitsbetrag, welchen ein solches Teilchen von selbst, also im Widerspruch mit dem II. Hauptsatze, auf Kosten der Umgebungswärme leistet, beträgt also²⁾

1) Am einfachsten folgt jene Berechnung schon daraus, daß die Formel (48), unter Einführung jenes c -Wertes, der Gleichung $D \frac{\partial v}{\partial x} + v c = 0$ genügen muß. Vgl. Einsteins Ableitung.

2) Trotzdem ist ein (automatisches) Perpetuum mobile unmöglich. Vgl. M. v. Smoluchowski, diese Zeitschr. 13, 1069, 1912; Vorträge üb. kinet. Theorien usw. S. 117 ff.; Bull. Acad. Cracovie 1915 P. 164.

men gleichkörnigen Suspension. ~~früher~~ für inhomogene Lösungen die Verteilungsformel (48) nicht ohne weiteres anwendbar, und obwohl Perrin auf die Fraktionierung seiner Gummigut-Lösungen größte Sorgfalt verwendet hat, ist es doch schwer, diesbezügliche Einwände vollständig zu entkräften.

Darum möchte ich eine Modifikation dieser Versuche vorschlagen¹⁾, welche diese Schwierigkeiten vollständig vermeidet, d. i. die systematische Beobachtung eines einzelnen Teilchens. Würde man die sukzessiven Entfernungen derselben vom Gefäßboden in äquidistanten Zeitintervallen (während langer Zeitstrecken) bestimmen, so würde dieses statistische Material genau der Verteilung einer sedimentierten und zwar gleichkörnigen Suspension entsprechen; andererseits ließe sich an denselben Teilchen, mit Hilfe von (54) oder auch mit Hilfe eigener Versuche mit größeren H , die Fallgeschwindigkeit c ermitteln, so daß man von jeder Unsicherheit in bezug auf Homogenität der

1) Diesbezügliche Versuche sind in Vorbereitung.

Długość rozciągłości



~~Wzrost~~

Isotropy

1). Ciężarowni $S =$ bardzo przybliżenie $= \mu$ w każdym przekroju (jeżeli się zaniedbuje odstęp między drutem) i przedłużenie

2). S w skutek rozciągłości (co tutaj będziemy zaniedbywać) μ

Z ciężarowni S przypada $S \frac{dy}{dx} + \mu \frac{dy}{dx}$ w kierunku Y

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \cancel{\mu Y} + \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Jeżeli się μY nie zaniedba:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\mu g$$

$$y = -\frac{g}{2} t^2 +$$

$m = \mu g$

$$m = \mu g$$

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu (y_{xx} + 2y_{xt} + y_{tt})$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Także współrzędna z



$$\mu g \, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (S' - S) = \mu \left(\frac{dy'}{dx} - \frac{dy}{dx} \right) = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

Tutaj μ w A jakim rozciągnięciu niech nie wchodzi w rachubę, ale przygotowanie dla dalszych zadań. Wzr:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$a^2 = \frac{g}{\mu g}$$

$$y = A \sin \alpha t \sin \beta x + B \cos \alpha t \sin \beta x$$

$$\alpha^2 = a^2 \beta^2 \quad \alpha = a \beta$$

$$y = A \sin a \beta t \sin \beta x + B \cos a \beta t \sin \beta x = 0 \text{ jeżeli koniec w spoczynku}$$

w razie jeżeli y jest 7π $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

$y=0$
 $x=0$
 $x=l$
 $\beta l = n\pi$
 $\beta = \frac{n\pi}{l}$
 $y = A \sin \frac{a n \pi x}{l} \sin$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$y = (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t) (M \cos \beta x + N \sin \beta x)$$

$$y=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=l \end{cases} \quad 0 < t < \infty \quad M=0$$

$$\beta = \frac{n\pi}{l}$$

Superpozycja dźwięków [ponieważ równanie różniczkowe drugiego rzędu jest liniowe]

$$y = \left[A \cos \frac{a n \pi x}{l} + B \sin \frac{a n \pi x}{l} \right] \sin \frac{n \pi x}{l}$$

$$\frac{a n \pi \tau}{l} = 2\pi$$

$$\tau = \frac{2l}{a n}$$

~~Wtedy~~

A, B muszą być dane z pominięciem warunków początkowych

$$n.p. \quad y=0 \quad \begin{cases} t=0 \\ A=0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin \frac{n \pi x}{l}$$

$$y = C \sin \frac{a n \pi t}{l} \sin \frac{n \pi x}{l}$$

$$\frac{2l a n \pi t}{l} = \frac{2n \pi x}{l} \quad \text{etc.}$$

$$\tau = \frac{2l}{a}$$

$$\tau = \frac{2l}{a}$$

$$\tau = \frac{2l}{a}$$

$$n = \frac{a}{2l}, \frac{2a}{2l}, \frac{3a}{2l} \text{ etc. } \text{harmoniczne tony}$$

$$n = \frac{\sqrt{g}}{2l}$$



Trasformacja:

$$\eta = f(x+at) \\ = \varphi(x+at) + \varphi(x-at)$$

Jużi warunki:

$$x=0 \begin{cases} \eta = \varphi(x) \\ \frac{d\eta}{dx} = \varphi'(x) \end{cases}$$

$$\sum A_m \sin \frac{m\pi x}{l} = \varphi(x)$$

$$\sum B_m \sin \frac{m\pi x}{l} = \varphi'(x)$$

} Serię Fouriera
? Czy ogólnie można dowolną funkcję φ
składować w ten sposób

Intej przyjmujemy jako pewne ^{złożenie} φ szeregi.

$$A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots + A_m \sin \frac{m\pi x}{l} + A_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \dots = \varphi(x)$$

$$- \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^l \left[\cos \frac{(m+n)\pi x}{l} - \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} \right] dx$$

$$= \frac{2l}{(m+n)\pi} \sin \frac{(m+n)\pi x}{l} - \frac{2l}{(m-n)\pi} \sin \frac{(m-n)\pi x}{l} \Big|_0^l = 0 \text{ jeżeli } m \neq n$$

$$2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l} \right) dx = l - \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \Big|_0^l$$

= l co także z tamtego wzoru wypływa dla $n \neq 0$

zika

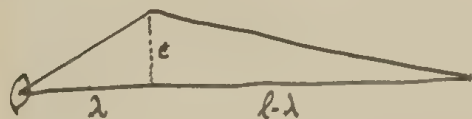
$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Weg weigern:

$$\eta = \frac{2}{l} \sum \left[\cos \frac{a m \pi t}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{m \pi x}{l} dx + \sin \frac{a m \pi t}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{m \pi x}{l} dx \right]$$

N. p. Von einem anderen ~~der~~ weigern



$$\varphi(x) = 0$$

$$\eta = \varphi(x) = \frac{c}{\lambda} x$$

$$c \frac{l-x}{l-\lambda}$$

$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{m \pi x}{l} dx = \int_0^{\lambda} \frac{c}{\lambda} x \sin \frac{m \pi x}{l} dx + \int_{\lambda}^l c \frac{l-x}{l-\lambda} \sin \frac{m \pi x}{l} dx$$

$$\int x \sin \alpha x dx =$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx} (x \cos \alpha x) = \frac{1}{\alpha} \cos \alpha x - x \sin \alpha x$$

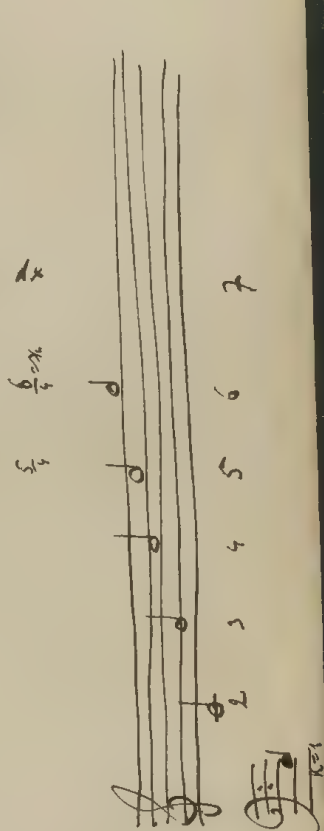
$$\int x \sin \alpha x dx = \int \frac{1}{\alpha} [\cos \alpha x - \frac{d}{dx} (x \cos \alpha x)] dx$$

$$= \frac{\sin \alpha x}{\alpha^2} - \frac{x \cos \alpha x}{\alpha}$$

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} x \sin \frac{m \pi x}{l} dx = \frac{\sin \frac{m \pi \lambda}{l}}{\lambda \left(\frac{m \pi}{l} \right)^2} - \frac{\lambda \cos \frac{m \pi \lambda}{l}}{\frac{m \pi}{l}}$$

$$\int_{\lambda}^l \frac{l-x}{l-\lambda} \sin \frac{m \pi x}{l} dx = \frac{1}{l-\lambda} \left[(l-x) \cos \frac{m \pi x}{l} + \frac{\sin \frac{m \pi x}{l}}{\left(\frac{m \pi}{l} \right)^2} \right]_{\lambda}^l$$

$$= \frac{\cos \frac{m \pi \lambda}{l}}{l-\lambda} - \frac{\cos \frac{m \pi \lambda}{l}}{\left(\frac{m \pi}{l} \right)^2} - \frac{\sin \frac{m \pi \lambda}{l}}{(l-\lambda) \left(\frac{m \pi}{l} \right)^2}$$



$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx = C \frac{\sin \frac{m\pi l}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{l-\lambda} \right]$$

$$\eta = \sum \omega_{am\pi} \frac{l c l^2 \sin \frac{m\pi x}{l}}{m^2 \pi^2 \lambda (l-\lambda)}$$

~~where zero belongs to the string~~ where zero belongs to the string

$$m \cdot \frac{\lambda}{l} = 1, 2, 3, \dots$$

m.p. jisti $\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2}$ to odpovídá druzí, cívoty etc...

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{7}$$

nódu (nich harmonický) ton etc.

Nódu dnu pohlížíme one tam nímotřítly nímé ujetý a ním jistoty.

Time rozvozané

$$\eta = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

Časem zrušit funkce zadržují nímé váním

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=l \end{array} \right\} \eta=0$$

$$x=0 \left\{ \begin{array}{l} \eta = \varphi(x) \\ \frac{d\eta}{dt} = \psi(x) \end{array} \right.$$

Co do nímotřítly:

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \psi(x)$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x) + \frac{1}{a} \psi(x) \right]$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x) - \frac{1}{a} \psi(x) \right]$$

$$\text{wíc: } \eta(x) = \frac{1}{2} \left\{ \varphi(x+at) + \varphi(x-at) + \frac{1}{a} [\psi(x+at) + \psi(x-at)] \right\}$$

Co to znázorňuje? $\sqrt{f_1}$



Definiujemy na to że $\varphi = 0$

a $\varphi(2) = 0$ z wyjątkiem dla $2 = \varepsilon$

Wtedy $\varphi(x+at) = 0$ tylko w punkcie $x+at = \varepsilon$
 więc $x = \varepsilon - at$ $\varphi < 0$

$\varphi(x-at) = 0$ " " $x-at = \varepsilon$
 więc $x = \varepsilon + at$ $\varphi < 0$

Wzrę prostokątne wychylenie ratują się w dwa geometrycznie takie same, ale o potęgach zmniejszone, które z poprzednią a będą udrzwoty w przeciwnych kierunkach. Wykład nienależy potęgniejszego; $a = \text{prędkość} = \sqrt{\frac{g}{\rho g}}$

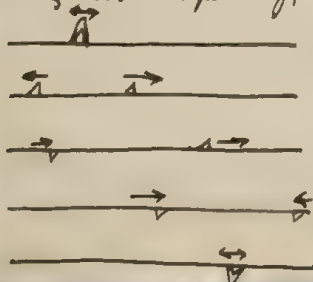
Co jednak nastąpi jeżeli $x+at > l$ albo $x-at < 0$?

Dla różnych argumentów φ już nie jest już udrzwoty, więc musimy sobie zadać pytanie? jeżeli $x \pm at$ jest tak daleko od końca strony przynależności, więc teraz tutaj zachodzi inne drugie warunki graniczne z których się dotąd nie korzystaliśmy, t.j. że $\varphi = 0$ $x=0$ l

zatem $\varphi(l+at) + \varphi(l-at) = 0$ $\uparrow > l$
 $\varphi(at) + \varphi(-at) = 0$ } określa φ dla argumentów ujemnych
 $\varphi(l+at) = -\varphi(l-at)$
 $\varphi(-at) = -\varphi(at)$

to znaczy że obie fale się odwrócić i będą znów napierać przeciwko z tą samą prędkością,

co się znów spotkają etc.



• Czy to rozwiązanie prowadzi do innych efektów?

Wtedy nie musimy formułować żadnych potęg
 i granic zewnętrznych to samo; możemy

more wave function ~~is~~ more wave function ~~is~~ the goal:

$$F(x) = \sum \left[\sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \cos \frac{n\pi x}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right]$$

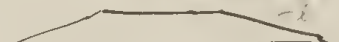
$$f_1(x+at) = \int \sum \left[\sin \frac{n\pi}{l}(x+at) \int_A f_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \right.$$

$$\left. \int_A \sin \frac{n\pi x}{l} dx \cos \frac{n\pi at}{l} + \int_A \cos \frac{n\pi x}{l} dx \sin \frac{n\pi at}{l} + \dots \right]$$

break in f_2 wave function of line form $y = \sum \left[A \sin \frac{n\pi x}{l} + B \cos \frac{n\pi x}{l} \right] \left[A \sin \frac{n\pi at}{l} + B \cos \frac{n\pi at}{l} \right]$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \cos \frac{n\pi x}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} \int_0^l F(x) dx \right]$$



|| Solution: $F_2 = \frac{1}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx$
 $+ \cos \frac{n\pi x}{l} \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx$

$\Phi(x+at) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \cos \frac{n\pi x}{l} \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right]$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \cos \frac{n\pi x}{l} \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right]$$

$$y(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \cos \frac{n\pi x}{l} \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right]$$

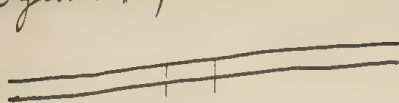
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \cos \frac{n\pi x}{l} \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right] \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \cos \frac{n\pi x}{l} \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right] \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \cos \frac{n\pi x}{l} \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right] \right]$$

Dynamika prętki:

$$\frac{\partial X_a}{\partial x}$$



$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \dots$$

$$X_a = E \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$u = \xi_0 + \xi$$

$$E \frac{\partial \xi}{\partial x} = p$$

$$X_a = p + E \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ nie zależy od napięcia i od przekroju}$$

$$= a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

odnosi się do struny i także do walców o przekroju dowolnym

prętki tamte stałe prędkościowe przy końcach

Inaczej jednak prętki n.p. prędkościowe w środku:

$$\text{Wtedy: } \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$x=0 \quad \xi=0$$

$$x=\pm l \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}=0 \text{ ponieważ koniec wznosi się równomiernie}$$

$$\begin{aligned} t=0 \\ \xi &= \varphi(x) \\ \frac{d\xi}{dt} &= \psi(x) \end{aligned}$$



Inaczej ogólnie rozwiązanie:

$$\xi = \sum [A \cos \alpha p t + B \sin \alpha p t] [M \cos \beta x + N \sin \beta x]$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \dots \dots \dots \cos \beta x = 0$$

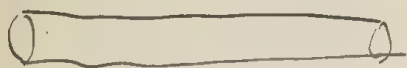
$$\pm \beta l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

wskazywać nieparzyste tony harmoniczne [cos' ustąpił on dla samego porównania prędkości przy przeciwnościach]

możemy wskazać wydegięcia przy końcach

Tak samo względem identyfikacji skrytek:

8



$$\rho \Theta dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = M_{x+dx} - M_x \quad \left\| T = \frac{E}{2(1+\nu)} \right.$$

$$\frac{E}{T} = 2(1+\nu)$$

$$\mu = \frac{G}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2.5$$

$$M_x = \Theta T \frac{\psi}{l}$$

$$= \frac{\partial(M_x)}{\partial x} dx$$

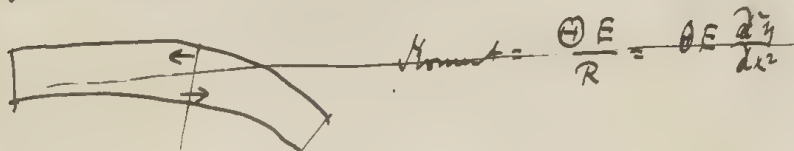
$$M_x = \Theta T \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

wzr. takie 2 trybiki skrzynekli do wiodan, moimby wypruhami E i T

skrytek przysk. rana wzr. skrytek korek:



z prum

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2c \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\eta = \sum_m [A_m e^{i\beta_m x} + B_m e^{-i\beta_m x}] [C_m e^{i\omega_m t} + D_m e^{-i\omega_m t}] f_m(t)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -a^2 \beta^2 f - 2c \frac{df}{dt}$$

$$f = e^{\alpha t}$$

$$\alpha^2 = -a^2 \beta^2 - 2c\alpha$$

$$\alpha = -c \pm \sqrt{c^2 - a^2 \beta^2}$$

$$\eta = \sum_m N_m \sin \beta_m x e^{-ct} e^{\pm \sqrt{c^2 - a^2 \beta_m^2} t}$$

jeżeli $c > a\beta$ to $\sqrt{c^2 - a^2 \beta^2}$ jest rzeczywiste, jeżeli $c < a\beta$ to jest ujemne, wtedy $e^{-\dots}$

$$c < a\beta$$

$$\eta = \sum_m N_m \sin \beta_m x e^{-ct} \left[\cos(\sqrt{a^2 \beta_m^2 - c^2} t) \pm i \sin(\sqrt{a^2 \beta_m^2 - c^2} t) \right]$$

$$n = \frac{\sqrt{a^2 \beta_m^2 - c^2}}{2\pi}$$

wzr. zawsze mniejsze niż $\tan \alpha$,

jeżeli $\alpha = 0$ to $\beta_m = \frac{\pi m}{2l}$

$$a = \sqrt{\frac{G}{\rho} \left(\frac{2}{2l} \right)^2 \frac{m^2}{4\pi^2} - \frac{c^2}{4\pi^2}}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2c \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{Cy nie ma takiej rozprawy analogicznej do d'Alemberta}$$

$$\eta = e^{-hx} f(x-bt)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -b e^{-hx} f' \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -h e^{-hx} f + e^{-hx} f'$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = b^2 e^{-hx} f'' \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = h^2 e^{-hx} f - 2h e^{-hx} f' + e^{-hx} f''$$

$$b^2 e^{-hx} f'' = (h^2 f - 2h f' + f'') + 2c b f'$$

zicli ~~zicli~~ ~~zicli~~

Nie możemy nie ma żadnego a zicli f dowolne
nie potrzebni równo dla różnych f

$$\text{np. } f = \sin(x-bt) \quad A \sin(x-bt)$$

$$\text{zicli kierunek } a^2 h = cb$$

$$h = \frac{cb}{a^2}$$

$$\text{i zicli } -b\beta^2 = a^2(h^2 - \beta^2)$$

$$-b\beta^2 = \frac{c^2 b^2}{a^2} - a^2 \beta^2$$

$$b^2 = \frac{a^2 \beta^2}{\beta^2 \frac{c^2}{a^2}} \quad b = \frac{a\beta}{\sqrt{\beta^2 \frac{c^2}{a^2}}}$$

$$b + a \left(1 - \frac{c}{2a}\right) = a - \frac{c}{2} \quad b = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}}} = a \left(1 - \frac{c^2}{2a^2}\right) = \text{podobnie}$$

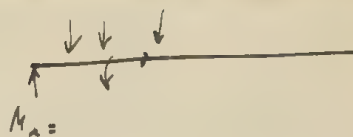
$$\beta b = \frac{2n}{T}$$

zatem podobnie ten wzór nawiązany

zatem mniejsze β więc mniejszy ten

Analogia z rozpraszaniem i absorpcją w optyce

$$M_x = A_x - \sum_0^x P(x-\xi) = A_x - \int_0^x P(x-\xi) d\xi$$



$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = A - \int_0^x P d\xi = Y$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -P_x$$

$$P_x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot EK$$

$$N_y, P_x = \text{const}$$

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \frac{P}{EK} \frac{x^4}{4!}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

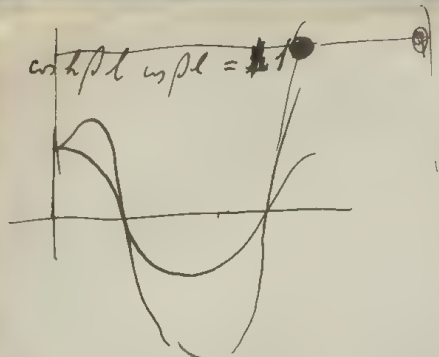
Phys. problem $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\psi = \frac{P_x}{E \dots}$

Stress, Power $\frac{d}{dt} \alpha$

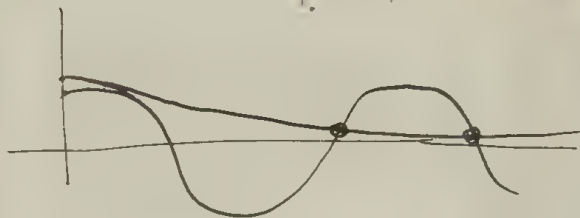
Skromny Pan!

Widz ie Pan ni strasnie napracował

$$H = \int_0^1 P_1(x) dx$$



also taken



$$p l_1 = \frac{3}{2}\pi + 10'0'11''$$

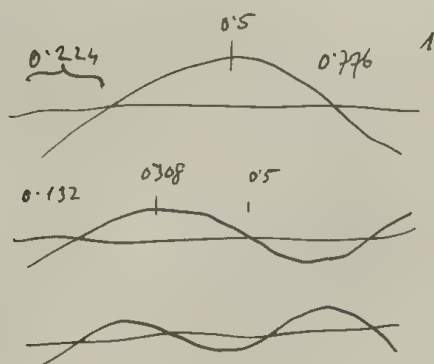
$$2 = \frac{5\pi}{2} - 2'40''$$

$$3 = \frac{7\pi}{2} + 7''$$

$$4 = \frac{9\pi}{2} - 0'3''$$

$$5 = \frac{11\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{a b^3}{12}$$



$$u = \frac{2\pi}{\alpha}$$

$$e^{i\alpha x}$$

$$E\theta \frac{dy}{dx} + \rho\theta \frac{dy}{dx} = 0$$

$$E\theta\beta^4 = \rho\theta\alpha^2$$

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}$$

$$u = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\beta^2 \sqrt{E\theta}}{\rho\theta}$$

$$\pm \left[(2k+1)\frac{\pi}{2} \right]^2 \frac{1}{2\pi} \sqrt{-}$$

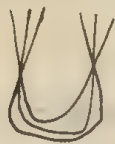
$$= \frac{(2k+1)^2}{8} \frac{\pi}{\rho} \sqrt{\frac{E\theta}{\rho\theta}}$$

$$= \frac{(2k+1)^2}{8\rho^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{b^2}{12} = \dots \frac{b}{\rho^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\text{just } \gamma = \frac{\alpha}{2\pi} \text{ taken}$$

Stefan Work

Widukle Stigroa



long form mit Linsen. die mittlere mitgez.

Curven, Kirchhoff, Rottler

Thony

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$c^2 = \frac{S}{\rho \delta}$$



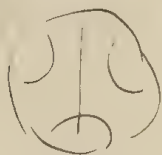
fraktige Beside

my.



etc

Fig 4 J. Gumm, Kirchhoff



$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$x=0$$

$$x=l$$

$$y=0$$

$$y = \text{Erf}$$

$$y = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) f(x)$$

$$-f''(A \cos \omega t + B \sin \omega t) = -a^2 f''(A \cos \omega t + B \sin \omega t) - \gamma f'(A \cos \omega t - B \sin \omega t)$$

$$-f'' A = -a^2 f'' A + \gamma f' B$$

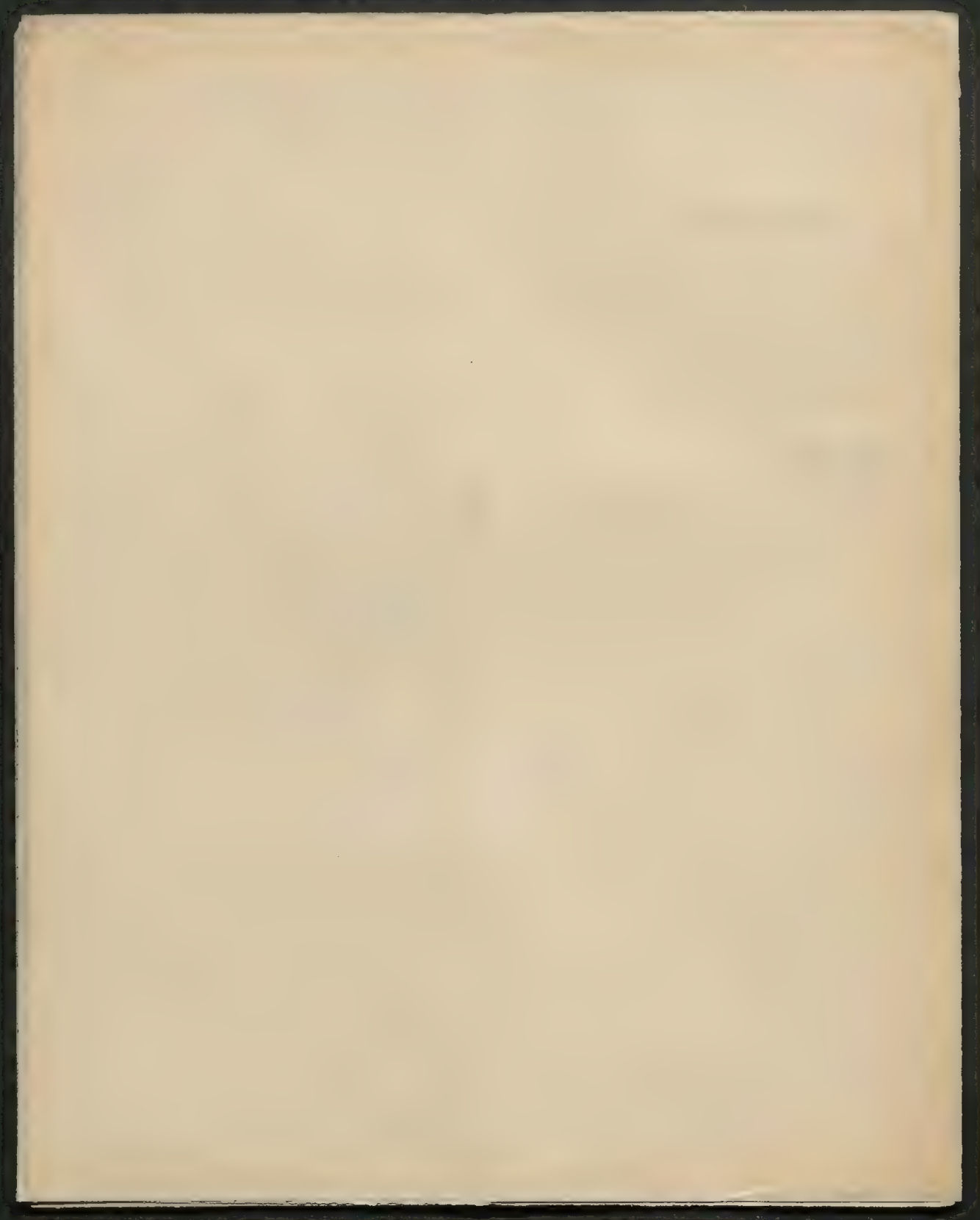
$$-f'' B = -a^2 f'' B - \gamma f' A$$

$$A = \dots$$

$$-f''$$

$$A = a_1 e^{\alpha x} + b_1 e^{-\alpha x}$$

$$B = b_1 e^{\alpha x} + b_2 e^{-\alpha x}$$



$$\alpha = \beta$$

$$\alpha^2 \beta M (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t) \sin \beta l = A \sin \alpha t$$

$$\beta M \rho \alpha^2 \sin \beta l = A$$

$$G = \frac{A \sin \alpha t \cos \beta x}{\beta \alpha \sin \beta l}$$

$$+ \sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$\text{depth } h \text{ depth} = \infty \text{ jishu } \beta l = 0, \pi, \dots, k\pi$$

$$A, B \text{ jishu}$$

2 independent terms are:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + b \frac{\partial G}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

$$G = (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t) M \sin \beta x$$

$$\alpha^2 [A \cos \alpha t + B \sin \alpha t] + b \alpha [A \sin \alpha t - B \cos \alpha t] = \alpha^2 \beta^2 [A \cos \alpha t + B \sin \alpha t]$$

$$\alpha^2 A - b \alpha B = \alpha^2 \beta^2 A$$

$$\alpha^2 B + b \alpha A = \alpha^2 \beta^2 B$$

$$\frac{\alpha A - b B}{\alpha B + b A} = \frac{A}{B}$$

$$b \alpha (A^2 + B^2) = 0$$

$$\alpha A$$

$$A = 0$$

$$A_1 \sin \alpha_1 (t - \frac{x}{a}) + A_2 \sin (\alpha_1 + \varepsilon) (t - \frac{x}{a}) =$$

$$= \underbrace{[A_1 + A_2 \cos \varepsilon (t - \frac{x}{a})]}_{A \cos \delta} \sin \alpha_1 (t - \frac{x}{a}) + \underbrace{A_2 \sin \varepsilon (t - \frac{x}{a})}_{A \sin \delta} \sin \alpha_1 (t - \frac{x}{a})$$

$$= A \sin [\alpha_1 (t - \frac{x}{a}) - \delta]$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \varepsilon (t - \frac{x}{a})$$

$$\tan \delta = \frac{A_2 \sin \varepsilon (t - \frac{x}{a})}{A_1 + A_2 \cos \varepsilon (t - \frac{x}{a})}$$

wgł można to wyrazić jako ton o zmiennej amplitudzie i fazy
periody zmian mianu A określone przez $\varepsilon = \alpha_2 - \alpha_1$, $\Delta \varphi = 2\pi(n_2 - n_1)$
wgł jeżeli n.p. $n_2 = n_1 + 1$ to 1 pełne drżenie na sek.

Resonancja przesłuch, przy której dwa obgłosy nach harmonizują
(Folk Kundte)

$$x=0$$

$$u=0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$x=l$$

$$u_l = A \sin \phi t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu A \cos \phi t = -a^2 \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$6 = (A \cos \phi t + D \sin \phi t) (M \cos \beta x + N \sin \beta x)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = (A \cos \phi t + D \sin \phi t) (-M \sin \beta x + N \cos \beta x) \Big|_{x=0} = 0$$

$$a^2 \beta M (A \cos \phi t + D \sin \phi t) \sin \beta l = A \sin \phi t$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\alpha}{a} \cos \mu A \sin ()$$

2. mody:

$$\frac{\alpha'}{a'} \cos \mu' A' \sin () + \frac{\alpha}{a} \cos \mu A = 0$$

$$\cos \mu' = - \cos \mu$$

$$\phi' = A \sin \left(t - \frac{x \cos \lambda}{-y \cos \mu + \frac{2A \sin \lambda}{a}} \right)$$

ciem większe t , tym większe

$$x \cos \lambda - y \cos \mu$$

$$x \cos \lambda - y \cos \mu = \mu$$

$$\cancel{x \cos \lambda - y \cos \mu} \\ x \cos \lambda - y \sin \lambda$$

$$\text{tem większe } -(-x \cos \lambda + y \sin \lambda)$$

$$[-x(-\cos \lambda) + y(-\sin \lambda)]$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) = -\cos \lambda$$

$$\frac{x \cos \lambda}{-y \cos \mu + \frac{2A \sin \lambda}{a}} = \cos \lambda$$

$$\frac{x \cos \lambda}{-y \cos \mu + \frac{2A \sin \lambda}{a}} = \cos \lambda$$

to kierunek x z tą samą prędkością

choć y z prędkością t , i oddalają się

po t y $\cos \mu = \cos(\mu)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha - \nabla^2 \phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t^2} = \alpha_i^* - \nabla^2 \phi_i^*$$

$$x=0: \quad u = u_i^*$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_i^*}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} = \alpha \frac{\partial \phi_i^*}{\partial x}$$

$$\mu = \mu_i^*$$

$$\mu_0 [1 + k\phi] = \mu_0^* [1 + k_i^* \phi_i^*]$$

$$k\phi = k_i^* \phi_i^*$$

$$\phi = \phi' + \phi''$$

$$| \phi_i$$

$$k A' \sin \alpha' \left[t - \frac{y \cos \mu' + 2 \cos \lambda'}{a} \right] + k A'' \sin \alpha'' \left[t - \frac{y \cos \mu'' + 2 \cos \lambda''}{a'} \right] = k, A, \sin \alpha, \left[t - \frac{y \cos \mu + 2 \cos \lambda}{a} \right]$$

porównaj dla dowolnych y z t :

$$\alpha' = \alpha'' = \alpha$$

wyższe wyrażenie tożsamość

$$\frac{a' \sin \mu'}{a} = \frac{a'' \sin \mu''}{a} = \frac{a_1 \sin \mu_1}{a_1}$$

$$\frac{\sin \nu'}{a} = \frac{\sin \nu''}{a} = \frac{\sin \nu_1}{a_1}$$

$$a' \lambda' + a'' \lambda'' = a_1 \lambda_1$$

$$\sin \lambda' = \pm \sin \lambda''$$

$$\sin \lambda' = \sin \lambda''$$

$$\sin \lambda' = -\sin \lambda''$$

$$\lambda_1 = \lambda_1 + 180^\circ \quad \lambda_2 = \lambda_2 + 180^\circ$$

$$\frac{\sin \mu'}{a} = \frac{\sin \mu_1}{a_1}$$

$$\frac{\sin \nu'}{a} = \frac{\sin \nu_1}{a_1}$$

$$\frac{\sin \lambda'}{a} = \frac{\sin \lambda_1}{a_1}$$

$$\frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda_1} = \frac{a}{a_1} \quad \text{2. Teorema!}$$

$$k A' + k A'' = k A_1$$

opet tuje z drugoga vermuten

$$a' A' \frac{\sin \lambda'}{a} \sin \lambda' + a'' A'' \frac{\sin \lambda''}{a} \sin \lambda'' = a_1 A_1 \frac{\sin \lambda_1}{a_1} \sin \lambda_1$$

$$a' A' \sin \lambda' + a'' A'' \sin \lambda'' = a_1 A_1 \sin \lambda_1$$

$$a' (A' - A'') \sin \lambda' = a_1 A_1 \sin \lambda_1$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda_1}$$

$$\sin \lambda' \sin \lambda' (A' - A'') = A_1 \sin \lambda_1 \sin \lambda_1$$

$$N.p. \quad k = k_1 \quad (\text{vodni - površine})$$

$$\frac{\rho_0 k}{\rho_1} : \frac{\rho_0 k}{\rho_1} = a_1^2 : a_2^2$$

$$\text{m.p.} \quad \rho : \rho_1 = a_1^2 : a_2^2$$

$$(A' - A'') \sin 2\lambda' = A_1 \sin 2\lambda_1$$

$$A' = A_1 \frac{\sin 2\lambda_1 + \sin 2\lambda'}{\sin 2\lambda'}$$

$$A' + A'' = A_1$$

$$\left(\frac{A'}{A''} - 1\right) \sin 2\lambda' = \left(\frac{A'}{A''} + 1\right) \sin 2\lambda_1$$

$$\frac{A'}{A''} = \frac{\sin 2\lambda_1 + \sin 2\lambda'}{\sin 2\lambda_1 - \sin 2\lambda'}$$

$$= \frac{\sin(\lambda_1 + \lambda') \cos(\lambda_1 - \lambda')}{\sin(\lambda_1 - \lambda') \cos(\lambda_1 + \lambda')} = \frac{\tan(\lambda_1 + \lambda')}{\tan(\lambda_1 - \lambda')}$$

(Formule II)

$$\text{Znači} \quad \lambda_1 + \lambda' = \frac{\pi}{2} \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{2} - \lambda'$$

$\sin \lambda_1 = \cos \lambda'$ $\tan \lambda = n$
to. cathectus λ' cu
reflexio λ' to. cathectus λ'

Freie gedruck $k: k_1 = \omega^2 = \omega_1^2$
 $= \omega^2 \lambda = \omega_1^2 \lambda_1$

125

$$\frac{A''}{A'} = - \frac{\omega(\lambda - \lambda_1)}{\omega(\lambda + \lambda_1)} \quad \text{Formel 1}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \omega^2 \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \quad \delta = \sum [A \cos(kx + \phi \sin \omega t)] [M \cos \rho x + N \sin \rho x]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \omega^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\alpha}{a} \sum \xi \quad] [-M \sin \rho x + N \cos \rho x]$$

$$u = \frac{a}{\omega} \sum \alpha [A \cos(kx + \phi \sin \omega t)] [M \cos \rho x + N \sin \rho x] = a \sum [A \cos \dots]$$

Srednia energia kinetyczna w pewnym punkcie:

$$\frac{\int_0^T u^2 dt}{T} = \int_0^T \left[\alpha_1^2 A_1^2 \omega_1^2 \cos^2 \alpha_1 (t - \frac{x}{a}) + \alpha_2^2 A_2^2 \omega_2^2 \cos^2 \alpha_2 (t - \frac{x}{a}) + \dots \right. \\ \left. + 2 \alpha_1 \alpha_2 A_1 A_2 \omega_1 \omega_2 \cos \alpha_1 (t - \frac{x}{a}) \cos \alpha_2 (t - \frac{x}{a}) + \dots \right] dt$$

$$\int \cos^2 \alpha_1 (t - \frac{x}{a}) dt = \frac{1}{2} \int [1 + \cos 2\alpha_1 (t - \frac{x}{a})] dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2\alpha_1} \sin 2\alpha_1 (t - \frac{x}{a}) \right]$$

$$\int \cos \alpha_1 (t - \frac{x}{a}) \cos \alpha_2 (t - \frac{x}{a}) dt = \int [\cos(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \frac{x}{a}) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)(t - \frac{x}{a})] dt$$

$$2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int}{T} = \alpha_1^2 A_1^2 + \alpha_2^2 A_2^2 + \dots = \frac{\sin^2 \lambda + (\sin 2\lambda_1 - \sin 2\lambda)^2}{(\sin 2\lambda_1 + \sin 2\lambda)^2}$$

Wgł. kinetyczna energia $\Sigma = \Sigma \text{ kin. energii}$

Potencjalna energia?

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \omega^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\xi = - \int \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} dx = \frac{a^2}{\alpha} \frac{\alpha}{a} \sum \sin \alpha (t - \frac{x}{a}) = \frac{a}{\alpha} \sum \sin \alpha (t - \frac{x}{a})$$

Potencijska energija =

$$\int \frac{d^2 \xi}{dt^2} d\xi = \alpha^2 \xi d\xi = \alpha^2 \frac{\xi^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right)^2 \text{ waga}$$

precišna pot. energija precišna kinet. energija

2. Digania rovnolyk

$$\delta = A_1 \sin \alpha_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) + A_2 \sin \alpha_2 \left(t - \frac{x}{a} \right)$$

$$= A_1 \sin \left(\alpha_1 + \alpha_2 \right) \left(t - \frac{x}{a} \right) - \sin \left(\alpha_1 - \alpha_2 \right) \left(t - \frac{x}{a} \right)$$

$$= (A_1 \sin \alpha_1 t + A_2 \sin \alpha_2 t) \cos \frac{x}{a} -$$

$$(A_1 \cos \alpha_1 t + A_2 \cos \alpha_2 t) \sin \frac{x}{a}$$

$$= A \left[(\cos \delta \sin \alpha_1 t + \sin \delta \sin \alpha_2 t) \cos \frac{x}{a} - (\cos \delta \sin \alpha_1 t + \sin \delta \sin \alpha_2 t) \sin \frac{x}{a} \right]$$

$$= A \left\{ \cos \delta \left[\sin \alpha_1 t \cos \frac{x}{a} - \sin \alpha_1 t \sin \frac{x}{a} \right] + \sin \delta \left[\sin \alpha_2 t \cos \frac{x}{a} - \sin \alpha_2 t \sin \frac{x}{a} \right] \right\}$$

$$= A \left[\cos \delta \sin \alpha_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) + \sin \delta \sin \alpha_2 \left(t - \frac{x}{a} \right) \right]$$

$$= \sin \left[\delta + \alpha_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) \right] + \sin \left[\delta + \alpha_2 \left(t - \frac{x}{a} \right) \right] + \sin \left[\delta - \alpha_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) \right] - \sin \left[\delta - \alpha_2 \left(t - \frac{x}{a} \right) \right]$$

$$A_1 = A \cos \delta$$

$$A_2 = A \sin \delta$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$$\tan \delta = \frac{A_2}{A_1}$$

$$A \sin \delta + A \cos \delta$$

$$= \sin \delta (1 + \cos \delta) + \cos \delta \sin \delta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \delta$$

Grady Exp. Ord.

| | | | | |
|---|------|-------|-------|-------|
| 0 | 10.9 | -257 | 37.8 | 406 |
| | 2261 | 11.71 | 209.7 | 305.6 |

Lithium

| | | | | | | |
|--------|-------|-------|-------|------|------|------------|
| | 0 | -28.5 | 103.5 | 130 | 140 | 275 |
| | | | | | | <u>788</u> |
| | | | | | | .975 |
| 1-1.6h | 1 | 0844 | 0784 | 0721 | 0683 | |
| 20.1h. | 1.501 | 0824 | 0749 | 0598 | 0444 | |

Steven 331.32

Thim 331.92

dt. 331.8 K. 1.405

 Reynolds 331.25
 Kille Vantier 330.66

wh. 331.9

Omaha 331.57

$$G = A \sin \alpha t + D \sin(\alpha + \delta)t = \cancel{A \sin \alpha t} + D \sin \alpha t = C \sin \alpha t$$

$$C^2 = A^2 + D^2 + 2AD \cos \delta$$

Taken together:

$$\frac{A^2 \ddot{\rho} \lambda}{2} = \frac{A^2 \rho_0 k \lambda}{2}$$

$$A^2 k \lambda = A^{1/2} k \lambda + A_1^2 k \lambda_1$$

$$\frac{A^2 - A^{1/2}}{a} k = \frac{A_1^2 k_1}{a_1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = a \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$a'$$

107

$$b = f(x-at) \quad x=0 \quad b_1 = f_0(x-at)$$

$$x=0 \quad \cancel{b = b_1 + b_2} \quad \cancel{u = u_1 + u_2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$u + u' = u_1 \quad \rightarrow \quad a^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right) = a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x}$$

$$A \cos(\alpha t - \beta x) + A' \cos(\alpha t + \beta x) = A_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1 x)$$

$$K(A + A') = A_1 K_1 \quad \alpha = \alpha_1$$

$$A \cos \beta + A' \cos \beta' = A_1 \cos \beta_1 \quad \left. \begin{array}{l} A \cos \beta + A' \cos \beta' = A_1 \cos \beta_1 \\ A \sin \beta + A' \sin \beta' = A_1 \sin \beta_1 \end{array} \right\} \quad A \cos \beta + A' \cos \beta' = A_1 \cos \beta_1$$

$$\Delta p + \Delta p' = \Delta p_1$$

$$k \beta + k \beta' = k_1 \beta_1$$

$$p = p_0 (1 + k \beta)$$

this is the length

change point

$$K = \frac{a_1}{a}$$

$$A' = \frac{A(a_1 - a)}{a_1 - a'}$$

$$A_1 = A \left(\frac{1 - \frac{a_1 - a}{a_1 - a'}}{1} \right) = \frac{a - a'}{a_1 - a} A$$

$$a = a_1$$

$$A + A' = A_1$$

$$A - A' = A_1 \frac{a_1}{a}$$

$$A = A_1 \frac{1 + \frac{a_1}{a}}{2}$$

$$A_1 = \frac{2a}{a + a_1}$$

$$A' = \frac{a - a_1}{a + a_1}$$

$$-\frac{\cos \mu}{a} A \cos(t - \lambda \sin \mu) + \frac{\cos \mu'}{2} A' \cos(t + \lambda' \sin \mu')$$

$$\cos \lambda = -\cos \lambda'$$

$$\sin \lambda = \sin \lambda'$$



$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\cancel{A} - a^2 \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$G = \frac{r_0}{r} A \sin \alpha \left(t - \frac{r-r_0}{a} \right)$$

$$\frac{dq}{dt} = -a^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{r_0}{r^2} A \sin \alpha \left(t - \frac{r-r_0}{a} \right) - \frac{r_0}{a r} A \cos \alpha \left(t - \frac{r-r_0}{a} \right)$$

$$q = -a^2 \int \frac{\partial \phi}{\partial r} dt$$

$$q = a^2 A \left[-\frac{r_0}{a r^2} \cos \alpha \left(t - \frac{r-r_0}{a} \right) + \frac{r_0}{a r} \sin \alpha \left(t - \frac{r-r_0}{a} \right) \right]$$

$$a = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
2m/s = 2m/s

$$\int_0^T q^2 dt = (a^2 A)^2 \left[\underbrace{\frac{r_0^2}{a^2 r^4}}_{= \frac{1}{r^2}} \underbrace{\cos^2}_{=0} + \frac{2r_0^2}{a^2 r^3} \underbrace{\cos \sin}_{=0} + \frac{r_0^2}{a^2 r^2} \underbrace{\sin^2}_{= \frac{1}{2}} \right]$$

$$= (a^2 A)^2 \int \frac{r_0^2}{r^2} \left[\frac{1}{a^2 r^2} + \frac{1}{a^2} \right]$$

$$G = A \sin \alpha \left[t - \frac{x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu}{a} \right] \quad A \sin \alpha \left(t - \frac{r}{a} \right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{a \sin \lambda}{a^2} G \quad \text{itd.} \quad \left| \quad \frac{\partial G}{\partial t} = -a^2 G \right.$$

$$G(x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu) = \dots$$

Wzrost jest to rozpraszanie

Również faza punktu, która może być równa $\frac{x \cos \lambda}{a} = \text{stała}$

= faza płaskiej

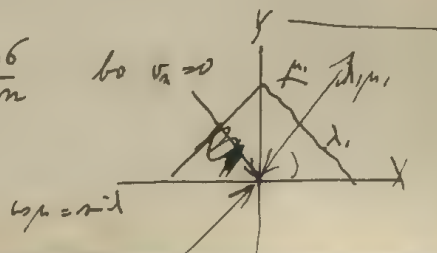
λ, μ, ν = kierunki promienia

Głównie natężenie na osi jest równe zero, bo $\frac{\partial G}{\partial t} = 0 = \frac{\partial G}{\partial r}$ bo $r \rightarrow \infty$

Np. $\lambda = 90^\circ$

$$G = A \sin \alpha \left(t - \frac{x \cos \lambda}{a} + y \cos \mu \right)$$

Natężenie na $y=0$:



Wzrostki:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \dots &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{k_0}{\rho_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \\ \rho = \rho_0 (1 + \phi) \end{array} \right. \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{k_0}{\rho_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \phi v}{\partial y} + \frac{\partial \phi w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\rho_0 k}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = a^2 \nabla^2 \phi$$

Np. fala kuliste (miejscowa z jednego punktu)

$$\phi = f(r, t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{y^2}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z^2} &= \end{aligned} \right\} \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$$

$$r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = a^2 \left[r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] = a^2 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] = a^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \phi \right) = a^2 \frac{\partial^2 (r \phi)}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \phi) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi)$$

$$r \phi = \overset{\text{nie zmienia}}{f_1(r+at)} + f_2(r-at)$$

$$\phi = f(t) \quad | \quad r=r_0 = A r_0 e^{i\omega t}$$

$$\phi = f(t) \quad r_0 A e^{i\omega t} = f(r_0 - at) =$$

$$\phi = \frac{r_0}{r} A \sin \alpha \left(t - \frac{r-r_0}{a} \right)$$

Amplituda prop $\frac{1}{r}$;

Long wave ~~to~~ warty, ...

$$r \phi = (A e^{i\omega t} + D e^{-i\omega t}) (M \sin \alpha \frac{r-r_0}{a})$$

$$\Delta = K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \mu_x - \mu = K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$? \quad \rho_0 \int_0^T u \, dt = \rho_0 \int_0^T (1 + k \phi) \, dt = \rho_0 k \int_0^T \phi \, dt$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\rho_0 k}{\rho_0} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\phi = A \, \sin(\alpha t - \beta x)$$

$$u = A \frac{\alpha}{\beta} \sin(\alpha t - \beta x)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \left\| \quad \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x=l \\ y=E \sin \mu t \end{array} \right.$$

$$y = \sin \beta x [A \sin \omega t + D \cos \omega t]$$

$$\sin \beta l [A \sin \omega t + D \cos \omega t] = E \sin \mu t$$

$$[A \sin \mu t + D \cos \mu t] \sin \beta l = E \sin \mu t$$

$$A = \frac{E}{\sin \beta l} = \frac{E}{\sin \frac{\beta l}{a}} \quad \beta = a \mu$$

$$y = \sum [A_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t] \sin \beta_n x + \frac{E \sin \mu t}{\sin \frac{\beta l}{a}} \quad \text{so } \beta_n = \frac{\pi n}{a}$$

$$\text{for } \beta_n = 0$$

$$l = k \frac{\pi a}{\mu}$$

to get $\omega = 2\pi \nu$ where ν is

Resonance

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{or } \mu^2 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x=l \quad \frac{\partial y}{\partial t} = E \sin \mu t$$

$$y = \sin \beta x [A \sin \omega t + D \cos \omega t]$$

$$-\beta^2 = -a^2 \mu^2$$

$$-\beta^2 A = -a^2 \mu^2 A + \mu^2 D$$

$$-\beta^2 D = -a^2 \mu^2 D - \mu^2 A$$

$$\frac{A}{D} = \frac{\mu^2 - a^2 \mu^2}{\mu^2 - a^2 \mu^2}$$

$$-\beta^2 \mu^2 = a^2 \mu^2 - a^2 \mu^2$$

$$\beta^2 = a^2 \mu^2 = \frac{\pi^2 n^2}{a^2}$$

$$\beta^2 = a^2 \mu^2 = \frac{\pi^2 n^2}{a^2}$$

$$D = \frac{RT}{N 6 \pi \mu a}$$

Diese Methode der Ableitung bietet gegenüber mancher anderen den Vorteil, daß man nicht die Gültigkeit der Stokes'schen Widerstandsformel für die Brownschen Zickzackbewegungen voraussetzen braucht, sondern sich auf die, z. B. von Perrin experimentell nachgewiesene Tatsache stützen kann, daß dieselbe für die Fallbewegung gültig ist).

Im übrigen illustriert dieses Beispiel besonders klar die Unzulänglichkeit des üblichen Entropiebegriffes bei Anwendung auf derartige Erscheinungen. Für ein schweres Teilchen ist natürlich der Gefäßboden die Lage, welche sich durch maximale Entropie des aus dem Teilchen und dem umgebenden Medium bestehenden Systems auszeichnet, und der Thermodynamiker würde erwarten, daß diese Lage von dem durch dissipative Reibungskräfte beeinflussten Teilchen schließlich aufgesucht würde.

In Wirklichkeit zeichnet sich zwar die niedrigste Lage für lange Zeiträume tatsächlich (gemäß 55) durch maximale Wahrscheinlichkeit aus; wegen der einseitigen Begrenzung entspricht dieselbe jedoch durchaus nicht dem durchschnittlichen Aufenthaltsort des Teilchens. Als durchschnittlicher Wert der innerhalb langer Zeiten von dem Teilchen eingenommenen Abstände vom Gefäßboden resultiert aus jener Gleichung die Größe:

$$\bar{x} = \frac{c}{D} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{cx}{D}} dx = \frac{D}{c} \quad (56)$$

welche man vielleicht kurz: „Dicke der Sedimentationschichte“ nennen könnte.

Selbst wenn ein Teilchen auf irgendeine Weise zum Gefäßboden gebracht und dort losgelassen wird, steigt es im allgemeinen, entgegen der Schwere, wieder auf.

sonstige nach Westgrens Methode mittels Zentrifugierens gegen die Wand einer Kuvette treiben und dann die Verbreitung der Teilchen studieren, sobald die Kuvette so aufgestellt ist, daß jene Wand zu unterst liegt.

In anderer Weise sind derartige Erscheinungen häufig verwirklicht worden: bei Versuchen über reversible Kolloide, nach Art des kolloiden Schwefels, bei welchen geringe Elektrolytzusätze oder Temperaturänderungen eine Koagulation bewirken, während die entgegengesetzte Operation das Koagulum in Einzelteilchen auflöst, welche der Schwere entgegen aufsteigen d. h. „in Lösung“ gehen.

Bekanntlich hat Perrin auf die Untersuchung des Sedimentationsgleichgewichts (48) seine genaueste Methode zur Bestimmung der Zahl N gegründet, welche nur die Ausführung zweier relativ einfacher Messungen erfordert: 1. Ermittlung der Höhe x , in welcher eine

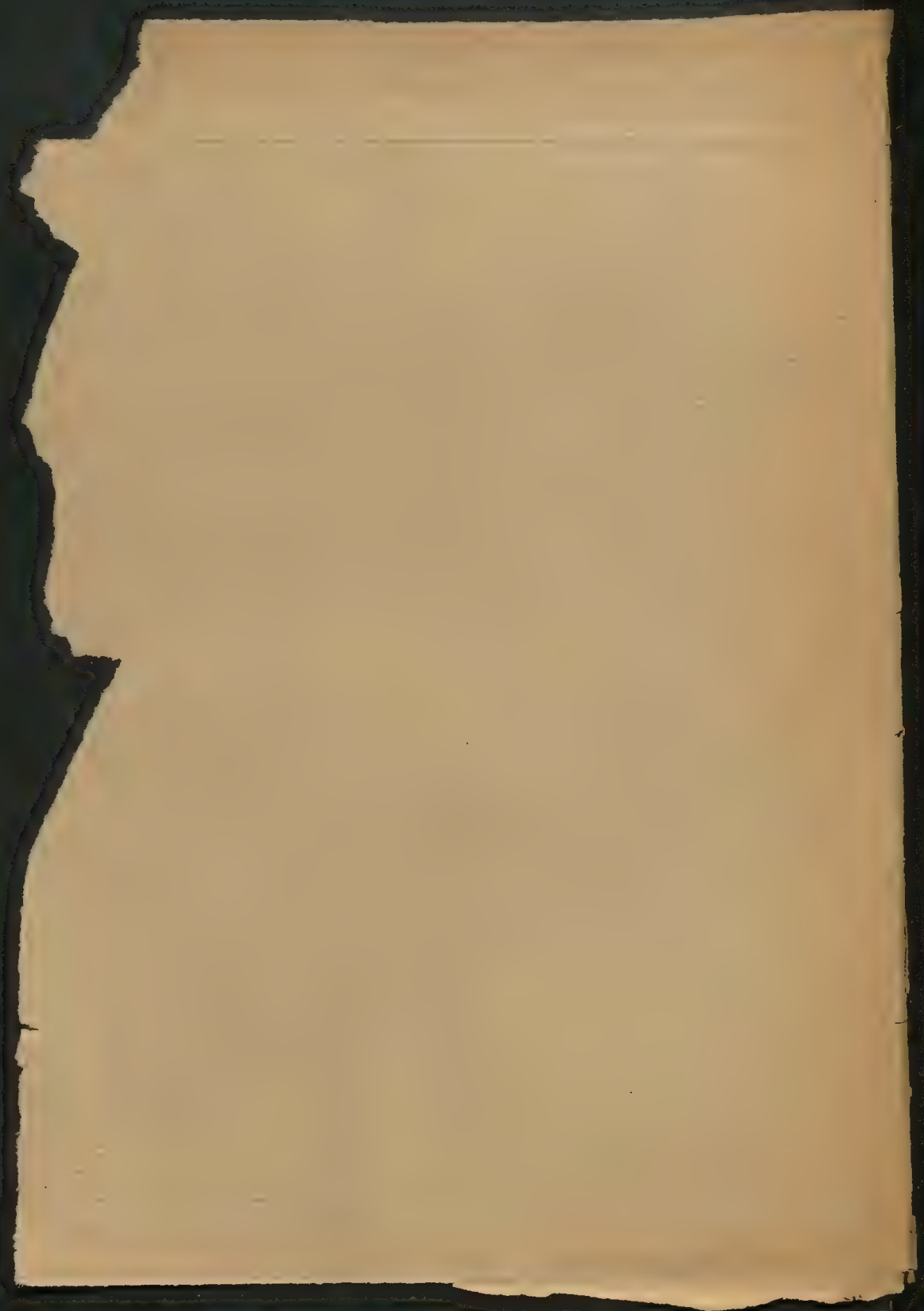
Abnahme der Zahl der Kolloidteilchen auf $\frac{1}{e}$ erfolgt. 2. Ermittlung des Teilchenradius. Merkwürdig bleibt bei diesen, mit großem experimentellen Geschick ausgeführten Untersuchungen immerhin eine gewisse Divergenz des Schubresultats $N = 68,2 \cdot 10^{22}$, gegenüber dem aus den Millikan'schen Messungen folgenden Werte $N = 60,6 \cdot 10^{22}$, wofür letzterer auch durch andere Erscheinungen (Strahlung, Radioaktivität) gestützt wird.

Wie dieser Widerspruch zu lösen ist, wage ich nicht zu entscheiden, doch möchte ich auf eine Hauptschwierigkeit der Perrin'schen Methode hinweisen, die Herstellung einer vollkommen gleichkörnigen Suspension. ~~Es ist~~ auf inhomogene Lösungen die Verteilungsformel (48) nicht ohne weiteres anwendbar, und obwohl Perrin auf die Fraktionierung seiner Gummilösungen die größte Sorgfalt verwendet hat, ist es doch schwer die beträchtliche Fällungswand

128

128

128



M. v. Smoluchowski (Lemberg), Experimentell nachweisbare, der üblichen Thermodynamik widersprechende Molekularphänomene.

I.

§ 1. Der Titel meines Referates klingt etwas revolutionär, und ich glaube tatsächlich, noch vor zehn Jahren wäre es ein Wagnis gewesen, sich in dieser Versammlung so respektwidrig über die traditionelle Auffassung der Thermodynamik zu äußern. Doch heute haben wir erstens überhaupt weniger Respekt vor Dogmen in der Physik, und zweitens ist in der Wertschätzung der kinetischen Atomistik und der Thermodynamik ein gewaltiger Umschwung eingetreten.

Übrigens handelt es sich ums heute zum Teil um längst bekannte Erscheinungen, wie die im Jahre 1827 entdeckte Brownsche Molekularbewegung, die seit 20 Jahren bekannte Opaleszenz von Gasen im kritischen Zustande, die alltägliche Erscheinung des Himmelsblaus usw. Nur das Verständnis derselben auf Grund der kinetischen Theorie ist neueren Datums, und auch hier liegt das Neue und den hergebrachten Anschauungen Widersprechende eigentlich nur darin, daß man mit dem Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz und überhaupt mit der Auffassung der Wärme als Bewegungserscheinung einmal Ernst machte, während man sich früher daran gewöhnt hatte, dies als eine Art poetisches Gleichnis zu betrachten. Heute, da die Ansichten über die ganze Sache sich geklärt haben, mag es an der Zeit sein, eine zusammenfassende Übersicht über diese Erscheinungen zu geben, deren prinzipielle Wichtigkeit darin besteht, daß sie als unzweideutige Experimenta erucis den langwierigen Kampf zwischen kinetischer Theorie und phänomenalistischer Thermodynamik zugunsten der ersteren entscheiden. Dabei werden gleichzeitig noch einige Probleme hervortreten, welche zu weiterer theoretischer und experimenteller Untersuchung einladen.

§ 2. Wir wollen uns von vornherein auf die Betrachtung solcher Zustände beschränken, welche einem thermodynamischen Gleichgewicht entsprechen, da hier die Widersprüche klar zutage treten. Während nämlich der herkömmlichen thermodynamischen Auffassung zufolge ein abgeschlossenes System einem Gleichgewichtszustand entgegenstrebt, welcher durch die Be-

§ 3. Wir berufen uns auf die statistische Mechanik. Die Behauptung, daß die Gleichgewichte befriedigt sind, ist eine kanonische Zustandsbedingung, daß also die Wahrscheinlichkeit durch die Koordinaten des definierten Zustandes ausgedrückt werden kann, ist in unserem Falle den bei ihm umgebende Temperatur durch die Boltzmann'sche Formel

$$dW = C e^{-\frac{N}{H\theta} E} dq_1$$

in welcher E die der entsprechenden Gesamtheit zugehörige Energie, N die Anzahl der Systeme, H die Boltzmann'sche Konstante, θ die absolute Temperatur, C eine Konstante, dq_1 ein Elementarvolumen des Zustandsraumes, dW die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der Systeme in dem Elementarvolumen dq_1 zwischen E und $E + dE$ liegen, einen Wert dW annimmt.

wo $\chi(\epsilon)$ die bei Verschiebung des Systems aus dem betrachteten Gleichgewichtszustand um die Koordinate ϵ erhaltene Gesamtenergie E ausdrückt.

Darin ist a ein Faktor, der von ϵ und nur dann eine Funktion von ϵ ist, wenn die Koordinate ϵ so groß ist, daß die mit Verändern der Koordinate ϵ zusammenhängende kinetische Energie nicht vernachlässigt werden kann.

Betrachtet man ein System, das sich in einem Gleichgewichtszustand befindet, so kann man es als ein System betrachten, das sich in einem Gleichgewichtszustand befindet, und die Koordinate ϵ ist dann die Koordinate des Systems.

In der Praxis kann man das System als ein System betrachten, das sich in einem Gleichgewichtszustand befindet, und die Koordinate ϵ ist dann die Koordinate des Systems.

hinwirkende Kraft

aber entgegengesetzt, so ist es meist von vornherein als ein System betrachtet, das sich in einem Gleichgewichtszustand befindet, und die Koordinate ϵ ist dann die Koordinate des Systems.

Ten podział mechaniki właściwie wspomniany odnosi się właściwie tylko do ~~ścisłych~~
 ciał stałych. ^{Do} Ciężkie ciała ciekłe i gazowe ~~podlegają~~ ~~odmiennie~~ nie można go
 zastosować gdyż określeniem tych ciał jest właściwie że są płynne i ich równo-
 sięż. ~~Właściwość~~ ~~ciężkości~~ ~~ciężkości~~ ~~ciężkości~~ Ruchy ciał ciekłych i gazowych
 taksi można subsumować w ogólną teorię sprężystości ale rodzaj
 sprężystości, który u nich napotykanym, różni się niejako od sprężystości
 ciał stałych, tak że równania ^{rozadnicze} ~~prężności~~ trochę odmienny kształt
 i w skutek tego najlepiej oddzielić tę część jako hydromechanikę i
 aeromechanikę od ~~mechaniki~~ sprężystości ciał stałych.

Właściwie wykład racjonalny systematyczny trzeba by rozpocząć od
teorii sprężystości ciał stałych i potem z niej przez spekulację dojść
do ~~teorii~~ mechaniki płynów, ale ze względów praktyczno-didaktycznych
woli tutaj inaczej postąpić. Właściwie teoria sprężystości jest stosunkowo
trudniejsza i skomplikowana więc woli rozpocząć najłatwiejszą część
t. j. hydrostatykę (i aerostatykę).

[illegible]

~~Jako~~ nie może się objawić n.p. jeżeli ciał lub gaz znajdujących się w naszym
 które całkowicie wypełnia, to nie mamy żadnych młotni rozadniającej różnicy
 Wszakże ta wiedza (know) że można zapomocą zmian odpowiednich
 temperatury i ciśnienia cieple i gazy zamieniać w siebie bez-przerwy
 ciągłości. N.p. bezwodnik ^{względny} ~~gazowy~~ płynny i gorący z dwóch naszych
 poddany je ciśnieniu atmosfer i ogrzewany do otędy są
 one zupełnie identyczne. Trudność poznania punktu krzyżowego.

Wspólny dźwięk więc charakteryzujący cieple i gazy a odróżniający je od ciał
 stałych jest ^{brak przepływu materii} ~~nieciągłością materii~~ t.j. że poddaje one się każdemu
~~obrotowi~~ ^{obrotowi} i tak długo zmieniają kształt jak długo te siły istnieją.

~~Z tego wynika że~~ (nie może w nich istnieć ^{ładnie} napięcie stykowe) ~~jak~~
^{jeżeli więc}
~~to~~ są w spoczynku to

gdyby istniało napięcie stykowe w jakimś kierunku toby
 nastąpił ruch.

Tak samo $\downarrow \uparrow$ to takie napięcie mogłoby nastąpić w kierunku
 normalnym do styku.

Ważne istnieć może tylko napięcie normalne, i to do tego równy wielkości
 we wszystkich kierunkach. n.p. $p \rightarrow \boxed{} \leftarrow p'$ rozprętałoby się gdyby nie
 istniały siły ^(ciężkości) ~~normalnej~~ wielkości p i p' z góry i z dołu etc.

To napięcie nasycony ciśnieniu. Wąż ciśnieniu normalne we
 wszystkich kierunkach takie samo — ale naturalnie w każdym punkcie może
 (Trudności Percepcji) być inne.

Σ jest siła zewnętrzna; aty tego rodzaju z jakimi to mamy do czynienia
np. ciężkość, prężność etc.; które są proporcjonalne do objętości
elementu; zwykle jeszcze odnosi się je do jednostki gęstości i oznacza
wtedy przez X, Y, Z

$$\text{np. } \Sigma = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \cdot X \quad \text{np. ciężkość} \quad H = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \cdot g$$

Wtedy więc uproszcza się to równanie

Nam prościej:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z \quad \dots$$

To ~~jest~~ równanie zasadnicze aerostatyki i statyki płynów.

Do tego musi jeszcze przejść równanie wyrażające związek między gęstością
 ρ i ciśnieniem p . W tym punkcie ciśnie i gęść różni się wprawdzie
nieznacznie od powietrza — otęże je ciśnie, które mniej (względnie) ściśnięte
nie jest.

~~Wzrost gęstości przy zmianie ciśnienia~~
~~Stwierdzenie, że ciśnie i gęść różni się wprawdzie~~
 $p = p_0 + \beta p$

$\beta =$ ściśliwość, bardzo mała
dla 0.0001
np. dla wody 0.00005 po atm.
dla 0.000003

~~Wzrost gęstości~~ ~~Wzrost gęstości~~ To wchodzi już znacznie w rachubę, jeżeli się ma
do czynienia np. z tak ogromnymi ciśnieniami jak na dnie morza
Tam $p = 800$ atm. więc

ale przy zwykłych zastosowaniach można uważać ciśnie i gęść
przebiegające jako niezmiennie. To też zwykle w rachunkach hydromechaniki

wszystkie ρ jako niezmiennicze.

$$X_1 = 2T \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \frac{\mu}{1-x} \right] \quad X_2 = T \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y} - \frac{\mu}{1-y} \right) \quad 1.12$$

Inaczej w acemchanice. Tęże hydrostat. wale wykona.

$$T = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad k = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Jedni temperatura jednolita w całej przestrzeni to równość jest dana przez prawo Boylea (Mariotte) $p v = R \theta = \text{const} = R \theta$

$$v = \frac{1}{\rho} \quad \rho = \alpha \frac{p}{R \theta} \quad \alpha = \frac{1}{R \theta} \quad p \frac{1}{\rho} = \frac{R \theta}{\rho} = \frac{R \theta}{\rho}$$

Wiele rzeczy skomplikowana przez jedni temperatura nie jest jednolita. Wtedy do tego równania cyfry mechaniczne trzeba jeszcze dodać równanie stanu uzupełnić równaniami termodynamicznymi. — To lepiej pomyśleć później na przykładach. Wzrost graniczny się na cięciach mechanicznych (hydrostatycznych)

Najprościej przykład się: siły mogące potencjały grawitacyjne etc. Obliczone tu że $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$ etc. z równań: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$

$$\text{Wtedy} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{etc.}$$

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial x} dx + \dots \right] = - \left[\frac{\partial U}{\partial x} dx + \dots \right]$$

$$\frac{dp}{\rho} = -dU$$

„kierunku drążenia

To jednak nie potrzebujemy więcej niż jedna. Jedni wycie siły nie mogą potencjały to wogóle cięci nie może powstać w spoczynku, musi nastąpić ciągły ruch.

Jedni punktem punktu gdzie $dp=0$ to badamy wielki powierzchnie stałego ciśnienia; wtedy takie $dU=0$ zatem powierzchnie stałego ciśnienia są poziomami potencjału grawitacji. Tak samo takie powierzchnie odkształcające dają cięci o różnym ρ , to: ~~to~~ 2 oba strony takich powierzchni:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} dp_s &= -dU_s \\ \frac{1}{\rho_2} dp_s &= -dU_s \end{aligned} \right\} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) dp_s = 0 \quad \text{zatem } dp_s = 0 \quad \text{wtedy } dU_s = 0$$

zatem powierzchnie przynajmniej dwie różne o równej gęstości = powierzchnie
równego ciśnienia = powierzchnie poziome

$U = \int \frac{dp}{\rho}$ w każdym rozważaniu, tak dla ustalonych jak nieustalonych

jeżeli $\rho = f(p)$ [wzr. równa temperatura], to $U = \int f(p) dp = F(p) = \Phi(p)$

wzr. wtedy powierzchnie poziomą są także powierzchniami równej gęstości.
jakiś przykład? może to być równość minimalna: prawa Korankiego.

Jeżeli cięciwa jest...

Warunek dy namierze równowagi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} & Z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} & X &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} & Y &= \end{aligned}$$

$$Z \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) + Y \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + X \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = 0$$

Obrotowa wyrażenie, wzmianka, że jeżeli cięciwa jest stała, to stały $U = \int \frac{dp}{\rho} = f(p)$ $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}$
(invariantem albo stałą)

Ciężar: powierzchnie tangencji $p=0$ [albo stajni $p=1$ lub]

wzr. naturalnie musi być powierzchnią poziomą

w takiej z tego że takie musi być

wzr. jedna składowa stywna $\frac{dU}{ds} = 0$ w powierzchni

albo z tego

Można je wzr. albo z tego wzoru wyprowadzić: normalne kierunki

wynikający

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{X}{\sqrt{\dots}} = \dots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z}$$

Cisnienie w pewnym punkcie jest pewną zmienną wielkością. Jest to funkcją punktu, więc (jeżeli używamy n.p. współrzędnych prostokątnych) funkcją trzech zmiennych niezależnych $p = f(x, y, z)$

Pewnego razu w mechanice punktu i.t.d. zwykłe molotamy do czynienia z funkcjami innego rodzaju. Zwykle molotamy tylko funkcje jednej zmiennej niezależnej, n.p. prędkości; prędkości i.t.d. $v, w = f(t)$

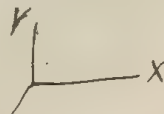
lub i.t.d. $F = f(z)$ odległości. To w mechanice punktu. Takie jest w mechanice ciał nitywnych: Prędkości postępowe środka masy i tacy prędkości obrotowe i.t.d. były równą wielkością dla całego ciała nitywnego, więc dochodzi nam tylko o zależności ich od czasu, znów tylko jednego. Jedyną funkcją trzech zmiennych była funkcja potencjału $U = f(x, y, z)$ którą określiliśmy tem że mały był nity $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$ i.t.d.

$$Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Cisnienie jest znów taką funkcją, w ogóle w ogóle teraz z funkcjami tego rodzaju dochodząmy myśli do czynienia; jest to w ogóle zwykły rodzaj funkcji w fizyce. Podobnie n.p. gęstość, temperatura. Tacy funkcjach tego rodzaju napotykanymy na różniczkach uścisłowych (jak powiesz). Ponieważ mały tem przedmiotem jest całkiem bityły wyzyskał Głowaci, ~~z~~ a w ogóle z tem dochodząmy myśli do czynienia, więc postaramy w krótkości najważniejsze zasady.

N.p. jakaś funkcja $\theta = ax^2y + z$



W pewnym punkcie równego ciśnienia

stępnodobitny powiększenie których równanie byłoby $\theta = ax^2y + z$ i.t.d.

Zostawiamy y, z stałymi

?

$$\theta_1 = f(x, y, z) \quad \theta_2 = f(x_2, y, z)$$

$$\text{Spad temperatury w kierunku } x = \Delta\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2, y, z) - f(x_1, y, z)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\lim = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ tworzy się według zwykłych reguł dla różniczkowania i ten sposób się stosuje
x tylko uważa się jako zmienne, a y i z jako stałe N.p.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{Wzyskując to: } \frac{[(x + \Delta x)^2 y + z] - [x^2 y + z]}{\Delta x} = (2x + \Delta x)y$$

~~W ten sposób~~ Odczytanie tego można napisać:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon$$

W ten sam sposób: Zmienną (spad) w kierunku y:

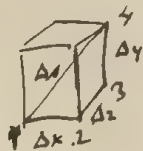
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

$$\text{a w kierunku } z: \frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

Uważa się analogicznie czy zrobić możemy że istnieją i jeszcze inne zmienne.

Spad w kierunku dowolnym znajduje się teraz za pomocą tych trzech pochodnych

N.p.



$$\theta_1 = f(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\theta_2 = f(x + \Delta x, y, z) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x + \Delta x, y, z)$$

$$\theta_3 = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z) + \Delta z \frac{\partial f}{\partial z} \dots$$

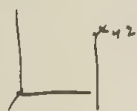
$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = f(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\text{Spad } \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \dots = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \dots$$

Do tego samego rezultatu prowadzi też:

194



$$[p(x+\Delta x) - px] \Delta y \Delta z = -pX \Delta x \Delta y \Delta z$$

gdzie ciśnienie niezależnym jest od położenia sąsiadujących nie-
równo po powierzchni $\Delta x \Delta y$ etc.

Właściwie niestety dowód (niezależny od kształtu elementu objętości):



$$\underbrace{\iint p \cos n_x \, d\sigma}_{= \iiint \frac{\partial p}{\partial x} \, dx \, dy \, dz} + \iint pX \, dx \, dy \, dz = 0$$

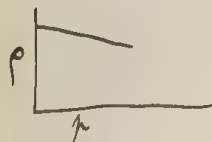
wielkości i kształtu

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -pX$$

względ powierzchni niezależnie od

Przy cięciu właściwie nie znamy związku między ciśnieniem i gęstością

$p = f(\rho)$ ale wiemy że powinnę się bardzo mało z p



$$\text{wzł} \quad p = f(0) + \frac{df}{d\rho} \rho + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{d\rho^2} \rho^2 + \dots$$

$$= \cancel{p_0} + \cancel{dp} \quad \text{zaniedbaj}$$

$$= p_0 + \rho \left[\frac{df}{d\rho} + \frac{1}{2} \rho \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \dots \right]$$

$\rho = \text{ciężkość}$ (względ gęstości od ciśnienia)

Wpływ temperatury tutaj można

zaniedbać bo dobre przedłożenie etc.

I. Ciężkość

$$X=0=Y=0$$

$$V=+g$$

$$U=-gy$$

$p = \rho g y + \text{const}$ a jeżeli się uwzględni ciśnień:

$$p + \rho g y = \int \frac{dp}{\rho_0 + \rho p} = \frac{1}{\beta} \ln(\rho_0 + \beta p)$$

$$\rho_0 + \beta p = A e^{\beta g y}$$

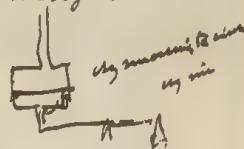
$$A = \rho_0$$

$$p = \frac{1}{\beta} \rho_0 [e^{\beta g y} - 1]$$

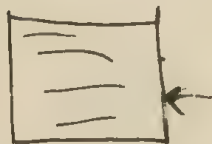
$$= \frac{1}{\beta} \rho_0 [\beta g y + \frac{1}{2}(\beta g y)^2 + \dots] = \rho_0 g y [1 + \frac{1}{2} \beta g y + \dots]$$

więc ciśnienie zależy tylko od poziomu, więc nie o kształcie naczynia

Pracownik hydrostatyczny Posała



Naturalnie ciśnienie takie takie samo na ścianie bocznej $p = \rho g y$



Jeżeli ściana mała (kółko) jaką siłę i w jakim punkcie trzeba by przetrzymać żeby równowaga nastąpiła?

$$P = \int p dA dz = \int \rho g y dy dz = \rho g \frac{b^2}{2} = \rho g \frac{b}{2} \cdot c b$$

a w odległości? Moment musi być taki sam więc

$$\int p y dy dz = \int \rho g y^2 dy dz = \rho g \frac{b^3}{3} c = P \cdot \frac{2}{3} b$$

= środek ciśnienia

Wpływ kształtu powierzchni dna

ciężkość podłoża w $\frac{1}{3}$ wysokości

Ciało zanurzone

$$y \sin - x \sin nx = y \sin nx \sin ny$$

$$\int y^2 dy dz x - \int y x$$

7-15



Składowa ciśnienia (ciężkości) = parcie

$$P_x = \int p \, d\omega \, n_x = \int p g y \, dy \, dz = 0$$

$$P_y = \int p \, d\omega \, n_y = p g \int y \, dx \, dz = p g \, Vol$$

zasada Archimidesa

wzrost nie do zanurzenia ciała pływającego, ciśnienia itp.

Czy nie powstaje momenty?

$$M_x = \int p \, y \, d\omega \, n_x = \int p g y^2 \, dy \, dz = 0$$

$$M_y = \int p \, d\omega \, n_y \cdot x = p g \int y \cdot x \, dx \, dz = p g \int x \, dx \, dy \, dz$$

Skutek taki jak gęstość ciała Płyty pływającej w wodzie mamy ciało zanurzonej
powinno równie sily tak samo jak w innych takich jak

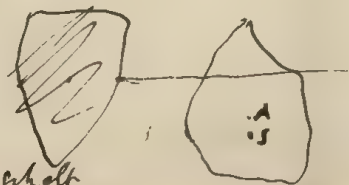
Równie wiele jak ubywa ciążkości - wtedy przyciąga ciężej

Równowaga statyczna jest przy nutej niech dyfuzja - ciału porusza w dół przyciąga przyciąga, nie jest
drutem momenty w tym kierunku. Stalowi bydlę ten moment.

W każdym razie statyka równowaga jest dlatego S powiżej A

co konstrukcja tych maszyn

jest: a) nie zanurzonej nie równo



zawartości Tommingsholt

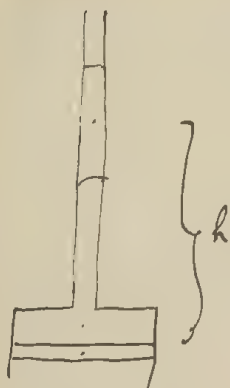
$$F.S.M. \approx \gamma =$$

$$F.A.S. \approx \gamma \approx 2 \frac{a}{f}$$

$$F.S.M. = F.A.S. \approx \frac{a}{\gamma}$$

$$= F \left[A.S. \approx \frac{b^3}{12f} \right]$$

$$Stohli' = G \left[\frac{b^3}{12f} - A.S. \right]$$



$$g. M. A h : g. \varphi A h. \rho A h. h = M = \rho. \varphi. A$$

domaga plynne dno vlny \bar{F}_1 na dno a taha narymni \bar{F}_2 do gory

gdy stale tylo wlozy cyta f na dno $f = \bar{F}_1 - \bar{F}_2$

tole gda imo pascina na pny wozne

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

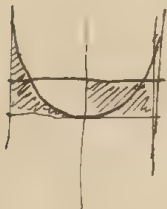
~~$$dy = \frac{\omega^2 x}{g} dx$$~~

~~$$2x \int x y dx = \frac{2x}{3} y$$~~



$$2x \int x dx dy = \frac{2x}{3} \frac{\omega^2 x^3}{g} \int x^3 dx = \frac{\omega^2 x^4}{g} \frac{x^4}{4}$$

$$\frac{\omega^2 x^4}{g} \frac{A^2}{4} + \frac{\omega^2 x^4}{g} \frac{A^2}{4} \left(\frac{\omega^2 x^4}{2g} - \frac{\omega^2 x^4}{g} \frac{A^2}{4} \right) = A^2 x \frac{\omega^2 x^2}{2g} = \left(\frac{\omega^2 x^4}{2g} \right) \cdot \left(\frac{A^2}{2} \right)$$



$$a = \frac{A^2}{2}$$

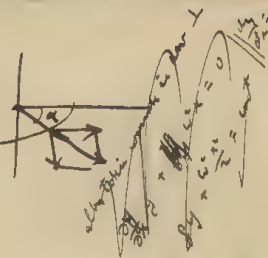
$$y = \frac{\omega^2}{2g} \frac{A^2}{2} = \frac{\omega^2 A^2}{4g}$$

Superficial entropies

Ciecz pod wpływem ciężkości i siły centryfugalnej

$$Y = g \quad \parallel \quad X = \frac{v^2 \cos \alpha}{R} = \frac{\omega^2 R^2 \cos \alpha}{R} \frac{x}{R} = \omega^2 x \quad Z = \omega^2 z$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad \text{wzr. hydrostat. potencjał}$$



to jest obciążenie cieczy U

$$\omega^2 x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\omega^2 z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{p}{\rho} = + \frac{\omega^2 x^2}{2} + f(y, z)$$

$$\frac{p}{\rho} = + g y + \varphi(z, z)$$

$$\frac{p}{\rho} = + \frac{\omega^2 z^2}{2} + f(y, z)$$

$$\frac{p}{\rho} = + \frac{\omega^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{2} + \text{const}$$

to jest $d\frac{p}{\rho} = \omega^2 x dx + \dots$
 to jest $d\frac{p}{\rho} = \omega^2 r dr + \dots$
 to jest $d\frac{p}{\rho} = \omega^2 r dr + \dots$

wzr. powierzchni poziomych będących paraboloidami obrotu o osi Y



wzr. takie powierzchnie będącymi miedzy innymi to kształt

krzywizny to takie miedzy innymi w innych przypadkach:

siła \perp na stykaniu

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{Y}{X} = \frac{g}{\omega^2 x}$$

$$\text{wzr.} \quad \omega^2 x dx + g dy = 0$$

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + g y = \text{const}$$

$$0 + g y_0 = \text{const}$$

N.p. wzdłuż linii ciężkości paraboloidy obrotu o osi Y



$$V_0 = \int \int 2\pi x dx dy = \int \int 2\pi x dx dy$$

$$2\pi \int_0^a x dx \int_{-\frac{\omega^2 x^2}{2g}}^{\frac{\omega^2 x^2}{2g}} dy$$

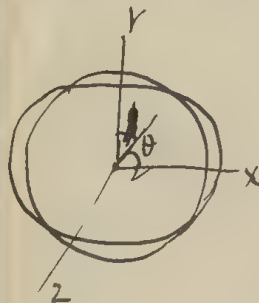
okazuje się że równie
 wysoko podnosi się
 na poziomie tej powierzchni

$$= 2\pi \left[y_0 \frac{g y_0^2}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{2g} \frac{y_0^4}{4} \right] = \pi \frac{g y_0^2}{\omega^2} \quad (\text{dla } \omega^2 = 0)$$

$$V_0 = 2\pi \int \int x dx dy = 2\pi \int_0^a x dx \int_{-\frac{\omega^2 x^2}{2g}}^{\frac{\omega^2 x^2}{2g}} dy = 2\pi \left[y_0 \frac{a^2}{2} - \frac{\omega^2}{2g} \frac{a^4}{4} \right] = \pi \frac{g y_0^2}{\omega^2}$$

ciężar pod wpływem grawitacji punktu i siły centryfugalnej na p. ciąża

113



$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{a^2}{r^2} \frac{x}{r} + \omega^2 x$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \frac{a^2}{r^2} \frac{z}{r} + \omega^2 z$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -g \frac{a^2}{r^2} \frac{r}{r}$$

$$\text{zwiększając } z = -\frac{x}{r^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right)$$

można to ująć jako
prędkość

ale wygodniej tak: $-\frac{1}{\rho} dp = dl = dl_1 + dl_2$

$$-\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} = U = U_1 + U_2$$

$$U_1 = -g \frac{a^2}{r} + \text{const} \quad U_2 = -\frac{\omega^2}{2} (x^2 + z^2) + \text{const}$$

$$\frac{p}{\rho} = +g \frac{a^2}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + z^2) + C$$

Na brzośnie $p_0, g, a, x=z=0$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \frac{x^2 + z^2}{2} + \dots$$

$$\frac{p_0}{\rho} = +g a + C$$

Wstawiamy równanie powierzchni kłój. gdzie $p=p_0$:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + g a \left(1 - \frac{a}{r} \right) + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + z^2) \quad \left| -g a \left(1 - \frac{a}{r} \right) + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + z^2) = 0 \right.$$

$$r^2 \sin^2 \theta = a^2 g$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{\omega^2}{2ga} r^2 \sin^2 \theta$$

$\frac{\omega^2}{2ga}$ bardzo małe

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \left[1 + \frac{\omega^2}{2ga} r^2 \sin^2 \theta \right]$$

$$r = \frac{a}{1 + \frac{\omega^2}{2ga} r^2 \sin^2 \theta} = a \left[1 + \frac{\omega^2 a}{2g} \omega^2 \theta \right]$$

$$r^2 = \frac{a^2}{\left[1 - \frac{\omega^2 a}{2g} \omega^2 \theta \right]^2} = \frac{a^2}{1 - \frac{\omega^2 a}{g} \omega^2 \theta}$$

$$\text{przekładając} \quad \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$$

$$\text{osłabienie} = 2e^2$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2 \theta}{a} + \frac{\sin^2 \theta}{b}$$

spłaszczenie $\alpha = \frac{\text{różnica między osiami równoległą i biegunową}}{\text{os. biegunową}}$


tańej stronie' należy dla ziemi $\omega = \frac{2\pi}{24.60.60}$ $g = 980$ $a = 6,336,000$

otrzymuje się $\alpha \approx \frac{1}{582}$

Wymiarom w rzeczywistości jest ono 2 razy tak wielkie (kąt $\frac{1}{290} - \frac{1}{500}$)

Polega na tym że przysięganie nie jest skierowane do środka ziemi.

Skłonne zadanie: znaleźć formy równowagi ciał obrotowych i przysięgę się prawu Newtona. Wynaga zjawiska potęgają

(1742) Mac Laurin, Clairaut: możliwe formy: sferoidy ~~ost~~ obrotowe
jedno ma to sferoid, drugi bardziej wile  ale tylko ci

do pewnej granicy prędkości obrotowej; jeżeli większa to niemożliwe
opóź tego sferoida sferoida Jacobi (ale tylko dla mniejszych prędkości)

Wskazanie Matthesena jest to dwa wale, ale tylko ci do pewnej
prędkości obrotowej - jeżeli większa odkształci?

Obrotu (Saturn) nie mogą być kształtami równowagi jak Maxwell pokazał
właż murek się składa z wnętrza w tych czterech.

Poincaré, Darboux
zjawiska fizyczne

Gaz izotermiczny pod wpływem ciężkości

$$\left. \begin{aligned} p &= \rho R \theta \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= -g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{g}{R \theta}$$

$$U = g y$$

$$\int \frac{1}{p} dp = -U$$

$$\ln p = -\frac{g y}{R \theta} + \text{const}$$

$$p = p_0 e^{-\frac{g y}{R \theta}}$$

$$y = \frac{R \theta}{g} [\ln p_0 - \ln p]$$

$${}^{10}\log x = {}^{10}\log e \cdot \ln x$$

$$\frac{R}{g} = \frac{980 \cdot 76 \cdot 13.6 \cdot 1000}{0.0013 \cdot 980} = \frac{273000}{0.0013}$$

$$\ln x = \frac{{}^{10}\log x}{{}^{10}\log e}$$

$$= \frac{1000}{0.0013}$$

$$\frac{{}^{10}\log x}{{}^{10}\log e} = \ln x \Rightarrow \frac{1}{{}^{10}\log e} = \ln 10 = 2.30585$$

$$y = \frac{2305.85}{0.00129} \left[{}^{10}\log \frac{p_0}{p} \right] = 18400 \cdot {}^{10}\log \frac{p_0}{p}$$

w metrach

| | |
|-------|-----|
| 18400 | 76 |
| 15000 | 124 |
| 7500 | 307 |
| 4800 | 428 |
| 3000 | 529 |
| 2000 | 598 |
| 1000 | 674 |
| 0 | 760 |

Tęto przyjęliśmy temperaturę jako stałą i nieuwzględniliśmy

zmniejszenia się ona z wysokością, więc θ inne

uwzględnia się to przybliżeniem w ten sposób że pomnożymy ten rezultat

przez $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2.273}$ i potem jeszcze kilka mniejszych korekt: wilgotność, zmienność

większani z powodu wysokości: przep. ruchowi etc.

w metrych wysokościach 1 mm = 10 m

[barometry różnicowe
aneroidy
zmniejszenie temperatury wzniesienia

Podupytym pravitougi do punktu P



$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{g a^2 x}{r^3} \text{ etc.}$$

proivodij: $\int \frac{dp}{\rho} = \int \left(- \frac{g a^2}{r^2} + \omega^2 r \right) = \int \frac{dp}{\rho} \cdot R \theta = R \theta \log p$

$$+ g a + \omega^2 r = \frac{R \theta \log p_0}{\rho}$$

$$g a \left(1 - \frac{a}{r} \right) = R \theta \log \frac{p_0}{p}$$

$$p = p_0 e^{-\frac{g a}{R \theta} \left[1 - \frac{a}{r} \right]}$$

dla r malo vs od a rovinu uph mui to nam dei r stur dnu enoi ^{formulu} ~~proivodij~~ vni:

$$r = a + xy \quad \left[1 - \frac{a}{r} \right] = \frac{r-a}{r} = \frac{xy}{a+x} = \frac{xy}{a} \quad p = p_0 e^{-\frac{g xy}{R \theta}}$$

Intej: fyston dla $r = \infty$ velhoie stur dnu $p = 10^{-346} p_0$

Atmosfera nasa: $\left\{ \frac{\partial \rho}{\partial r} = \left[\frac{\rho}{\rho_0} \right]^{k-1} \right.$
 Nie jst izotermicna; zatu $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{k}}}$

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \int \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}} dp = \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0} \int p^{-\frac{1}{k}} dp = \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0} \frac{p^{-\frac{1}{k}+1}}{-\frac{1}{k}+1} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{p}{\rho_0} \cdot \frac{k}{k-1}$$

$$\frac{p_0}{\rho_0} \frac{k}{k-1} = + g a + \omega^2 r$$

$$\left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{p}{\rho_0} - \frac{p_0}{\rho_0} \right] = - \frac{k-1}{k} g a \left[1 - \frac{a}{r} \right]$$

$$\left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{p}{p_0} \right] = \frac{k-1}{k} g a \left[1 - \frac{a}{r} \right] \frac{\rho_0}{p_0} = \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1-\frac{1}{k}} \right] = \left[1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right]$$

Pokazij si ze p fyston jst = 0 we vprasku 27. ^{formulu} ; natura dnu muihoie; fystd ze nie jst to prous adiobotajany

kinetyka
Hydrodynamika ciekły doborczych tej. has. stano: wśmnie u baidym punkcie iśone u wygł...
z kłoneń opyzystośi zozomoz spozalozoyi albo tti has. p'ioednio: kinn'pach
inowadnie d.p.

120



$$\rho dx dy dz \frac{dH}{dt} = \rho X dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} \dots$$

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dH}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$$

in dindich dny
Tutoz anawa u p'ioednio p'ioednio
ciekly, a $\frac{dH}{dt}$ = unimmoń tyj p'ioednio
p'ioednio uśom na d'ioednio

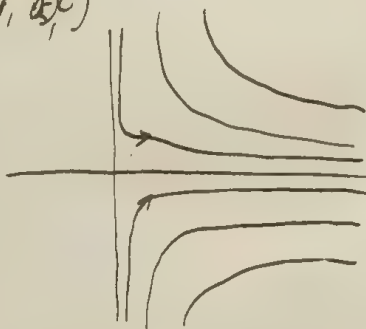
Wiz to p'ioednio uśom $\frac{dH}{dt} = f(x, y, z, t)$ zeto $u = \frac{dH}{dt}$ d'ioednio...

Mimo j'ioednio:

uśom u j'ioednio d'ioednio p'ioednio uśom u p'ioednio

$$u = f(x, y, z, t)$$

N.p.



$$u = \varphi(x, y, z, t)$$

$$v = \psi(x, y, z, t)$$

J'ioednio uśom $\frac{\partial u}{\partial t}$ to uśom
uśom p'ioednio tyj uśom uśom,
a uśom p'ioednio uśom uśom

uśom p'ioednio, co j'ioednio uśom uśom $\frac{dH}{dt}$, n.p. j'ioednio uśom uśom
to $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ p'ioednio tyj $\frac{dH}{dt} \geq 0$

uśom uśom uśom:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H(x', y', z', t') - H(x, y, z, t)}{\Delta t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned}$$

Resonance: full stop

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + g \frac{\theta^2}{2} = |g - \frac{1}{2} \omega^2|$$

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} = g - g \frac{\theta^2}{2} \quad | - \frac{1}{2}$$

Tkże bezpośrednio:

121


prędkość elementu potęgującego zmienia się przez to że:

1). prędkość w ogółu się zmienia: $\frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$

2). na tym miejscu w ogółu wykona prędkość $\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \text{Euler}$$

Do tego jeszcze uwzględnić między gęstością i prędkością, bo

 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$ i $\rho = \rho(x, y, z)$

(Inny sposób: Lagrange)

zmienna: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ to $\rho = f(x)$ zatem $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}$

gdzie $P = \int \frac{1}{\rho} dp$

i zmienna $X = -\frac{\partial u}{\partial x}$ etc.

to można napisać prawie stromy ogólny wzór: $= -\frac{\partial(u+P)}{\partial x}$ etc.

Do tego wszystkiego jeszcze warunki dla powierzchni

zmienna ma teraz to jedynie warunki że stała dawa wartość 0

albo zmienna może to równy stała dawa

Odkrywanie elementu ciał

$$\begin{matrix} x & y & z \\ \xi = x + u \Delta t \\ \eta = y + v \Delta t \\ \zeta = z + w \Delta t \end{matrix} \quad \left\| \begin{matrix} x' & y' & z' \\ \xi' = x' + u' \Delta t \\ \eta' = y' + v' \Delta t \\ \zeta' = z' + w' \Delta t \end{matrix} \right.$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\xi' - \xi}{x' - x} = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{u' - u}{x' - x} \Delta t = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t \quad \text{etc.}$$

Przebieg odkrywania:

$$x' = x + a, \quad x + \frac{c_1 + a_1}{2} z + \frac{a_2 + b_1}{2} y + \beta z - \gamma y \quad \left\| \begin{matrix} \beta = \frac{a_3 - c_1}{2} \\ \gamma = \frac{b_1 - a_2}{2} \end{matrix} \right.$$

$$= x + \frac{\partial \xi}{\partial x} x + \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}}{2} z + \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}}{2} y + \frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial x}}{2} z - \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}}{2} y$$

$$\text{wzr} \quad \left. \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2 \frac{\beta}{\Delta t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \frac{\gamma}{\Delta t} \end{matrix} \right\}$$

$$\theta = a_1 + b_1 + c_3 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Delta t$$

przekońni obrotu = składowe ruchu wirowego

Także bezpośrednio:



$$y = t_g \alpha_1 = t_g(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{y_0' - y_0}{x_0' - x_0}$$

$$t_g \alpha_1 = \frac{y_0' - y_0}{x_0' - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$t_g \alpha_2 = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{(y' - y_0) + (y_0 - y)}{(x' - x_0) + (x_0 - x)} = \frac{(y' - y_0) + (y_0 - y)}{(x' - x_0) + (x_0 - x)}$$

$$= \frac{(v' - v) \Delta t + \Delta y}{(u' - u) \Delta t + \Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v'}{u'}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y [(u' - u) \Delta t + \Delta x] - \Delta x [(v' - v) \Delta t + \Delta y]}{\Delta y [(v' - v) \Delta t + \Delta y] + \Delta x [(u' - u) \Delta t + \Delta x]}$$

$$= \frac{\Delta y [(u' - u) \Delta t - (v' - v) \Delta x]}{\Delta y [(v' - v) \Delta t + \Delta y] + \Delta x [(u' - u) \Delta t + \Delta x]}$$

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} \left[\frac{(u' - u) \Delta t - (v' - v) \Delta x}{(v' - v) \Delta t + \Delta y + (u' - u) \Delta t + \Delta x} \right] =$$

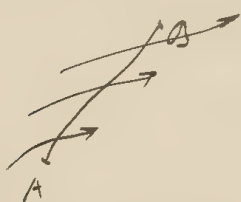
$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) \Delta t + \Delta y$$

Wyobraź sobie 2 krążące



Wektor
 Jedną musimy pędzić po linii drążąc wir wirujemy aby średni powrót do ~~względnie~~
 tego samego położenia.

Ogólnie mamy $A \cdot \vec{v} = \vec{C}$



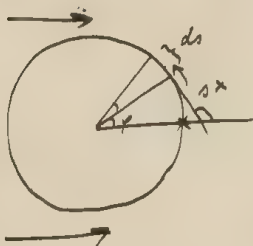
$$\int_A^B (u dx + v dy + w dz) = \int_A^B \left[u \frac{dx}{ds} + \dots \right] ds =$$

$$C = \int_A^B [u \cos(\alpha) + v \cos(\beta) + w \cos(\gamma)] ds$$

Kierunek (Circulation) jest zawsze zamknięta:



Niech $v = u = 0$ $w = c$



$$ds = a d\varphi$$

$$\cos(\alpha) = -\sin \varphi$$

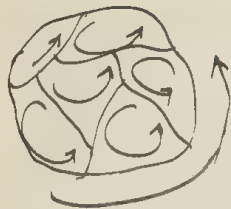
$$\cos(\beta) = \cos \varphi$$

$$C = - \int_0^{2\pi} c \sin \varphi a d\varphi = -ac \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = ac \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Jedną jedynkę pędzić po kole: $u = -\frac{a}{r} f$ $v = \frac{a}{r} f$

$$C = \int f (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) ds = \int f ds = 2\pi a f$$

jestliže je pole potenciálu ϕ dané rovinné proudové tokové čáry v rovině!



Křivnici po obvodu kruhu = \sum křivnic po obvodu

přijde-li se (natvrzení v
přímce křivky)

Křivnici po obvodu vektorového pole:

x_0, y_0, z_0

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y_0) + \frac{\partial u}{\partial z}(z_0) \quad \text{at}$$

$$2f' = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\rho = \frac{\partial u}{\partial z}$$

Abso. jeví vektorový pole \vec{u} dle

$$u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z$$

$$v = v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 z = v_0 + y\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \frac{z}{2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \frac{x}{2} + yx - \alpha z$$

at

$$= u_0 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 +$$

$$u = u_0 + A_x x + H_y + G_z + \rho z - \gamma y$$

$$v = v_0 + H_x + O_y + F_z + \gamma x - \alpha z$$

$$w = w_0 + G_x + F_y + C_z + \alpha y - \rho x$$

$$\int (u dx + v dy + w dz) = \int (u_0 dx + \dots) + (A_x dx + O_y dy + C_z dz) + H(y dx + x dy) + G(2 dx + x dz) + F(\dots)$$

$$+ \alpha(y dz - z dy) + \rho(2 dx - x dz) + \gamma(x dy - y dx)$$

$$= \left[(u_0 x + \dots) + A \frac{x^2}{2} + O \frac{y^2}{2} + C \frac{z^2}{2} + H xy + G xz + F yz \right] + \int \alpha(y dz - z dy) + \dots$$

$= 0$

$$\int \frac{y dz - z dy}{2} = f(x, y, z) \quad \text{at}$$

$$\text{Wzic } \int (u dx + v dy + w dz) = \oint [\alpha \cos x + \beta \cos y + \gamma \cos z] dF$$

$$\text{d} \leq \quad \quad \quad = \leq$$

$$\int u dx = \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \cos x + \dots \right] dF$$



Jakoś być powierzchnie z tą krzywą jako ~~brzocho~~ ^{brzochem}

Wzic jeszcze $\xi = \eta = \zeta = 0$ to \oint krzywizna po krzywej zamkniętej, to nawiniemy ręką niewidoczną

Rozważymy teraz zmienne ^{prosta} ~~krzywizna~~ dx , tak że odwołamy go do krzywej poruszając się razem z cięciem

$$\frac{d}{dt} \int_A^P \dots = \int_A^P \frac{d}{dt} [u dx + \dots]$$

Wzic dx zmienia się do wartości krzywej zmniejsza się

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u dx) &= \frac{du}{dt} dx + u \frac{d(dx)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = du \end{aligned}$$

$$= \left[X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial x} \right] dx + \frac{1}{2} d(u^2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_A^P (X dx + Y dy + Z dz) - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} dz \right] + \frac{1}{2} d(u^2 + v^2 + w^2) \Big|_A^P$$

Jżeli istnieją funkcje u, v, w $\rightarrow -dU$ i dP wtedy

$$= \left[-(U+P) + \frac{u^2+v^2+w^2}{2} \right] \Big|_A^P$$

wzic jeszcze $A \rightarrow P$ t.j. krzywa zamknięta (i j.w. U zęby jednorodności)

to $\frac{dC}{dt} = 0$ zatem kręgi nie zmieniają się

Z tego więc: jeżeli ζ jest niezerowe albo ujemne, to kręgi nie zmieniają się

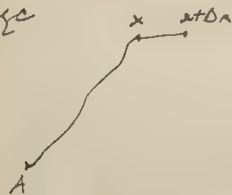
Ruch niewirowy: z prędkością kątową ω przemieszczają się, jeżeli ω jest dodatnie, to kręgi przesuwają się w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu, jeżeli ω jest ujemne, to kręgi przesuwają się w kierunku zgodnym z kierunkiem obrotu.

$\zeta = \eta = \xi = 0$ wtedy także kręgi nie zmieniają się

zatem $\int_A^C \frac{1}{r} dr = - \int_C^A \frac{1}{r} dr = \int_A^C \frac{1}{r} dr$ więc wartość przeliczenia od drogi kręgiem kręgiem ξ, η, ζ jest funkcją (x, y, z) ale nie

kręgiem kręgiem

więc



$$\int_x^{x+dx} \frac{1}{r} dr = u dx = \varphi(x+dx, y, z) - \varphi(x, y, z)$$

$$\text{zatem } u = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+dx, y, z) - \varphi(x, y, z)}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Przy tym punkcie A był dowolny; przemieszczając się, przemieścimy się do innego punktu B, wtedy trzeba dodać do φ jeszcze kąt θ t.j. θ jest stały, z pochodnych to otrzymamy niezmienność. Wzajemny φ potencjał przemieszczenia (jednowartościowy)

Takie odwrócenie jeżeli istnieje potencjał przemieszczenia to musi być niewirowy

$$\text{bo } \zeta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{etc}$$

Wtedy przemieszczamy się z prędkością ω to zawsze daje geometryczne wyobrażenie rotacji, ale można także potęgować system analityczny: ~~zatem~~ każdemu rotacji mamy

rownanie $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$

$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}$

można u, v, w wyrazić jako pochodne funkcji $\int u dx + v dy + w dz$

Z zasady zachowania wypływu równowagi: ruch nieważny zawsze powstanie nieważny (nie da się nie kontynuować i być tam)

Jaki kształt przybierze nasz równanie?

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$

$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2)$

Łatwo: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) = - \frac{\partial (u + p)}{\partial x} \quad \int dx$

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2 + w^2) = - \frac{\partial (u + p)}{\partial y} \quad \int dy$

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \Delta \phi = 0$

Jedną z teorii: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\rho = \frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}$

$\frac{p}{\rho} = -u - \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)$ Łatwo ciśnienie tam najmniejsze

gdzie prędkości są największe



n.p. rozpylacz



(W tym równaniu mamy zawarte jako szczególny przypadek ciągły)

hydrostatyka

Wypływ z naczynia pod wpływem ciążkości



$u = -gy + \text{const}$

$v^2 = +2gy - \text{const}^2 \quad (-\frac{p}{\rho})$
 $0 = a = \text{const}$
 $v^2 = 2gy$

1.) prawo Torricellego przykładać tak jak fizyka punkt gęstości 2 powierzchni
ciężar się tamtych (wzrost nierzadkości od gęstości etc)
(Uwaga: gęstości nie będąc such ciałem nierównym w prawdziwie fine warstwy
rozłożenie równoległe się powiększają do punktu wyjścia tarcie wzdłuż i szerokości)
A jeżeli tego ciśnienia nie będzie ciałem = 0 w przekroju występuje tylko
równie w równych punktach, więc w ogóle nie ciałem równie przykładać.

Jeżeli się wyobrażamy masę ciału występującą to $\rho \cdot g \cdot V_{\text{cyl}} = \rho \cdot g \cdot V_{\text{cyl}}$
ale nie g nie uwalnia wstąpić przekroju tylko wężym (wzrost ciałem), co jest od
kontaktu i przylgania - ciężar $(\frac{1}{2} - 1) \cdot 0.7$

Linie prądu
~~Strugi~~ ciężar, podane przez kierunek w w w każdym punkcie:
w każdym punkcie V dokładnie zatem $\frac{d\varphi}{ds} > 0$
więc φ musi rosnąć a jednak znów musimy wrócić do tego
samiej wartości w punkcie x (powrót i jednorodność), zatem w ogóle
nie mogą istnieć ~~strugi~~ zamknięte tylko muszą się kończyć na powierzchni
jżeli potęgą i jeżeli przestają jednostajnie

strugi potęgą
wzrost i wzdłuż
wzrostem ciałem i
funkcją gęstości

$\nabla^2 \varphi = 0$ Potęgą linii i strugi etc.
W dwóch kierunkach: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] = -\frac{1}{2} \Delta \varphi$
 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ do powierzchni = 0 $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$
Każda $f(x+iy) = (u(x,y) + i v(x,y)) = \frac{d}{dz} (z + i y)$
 $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$
 $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

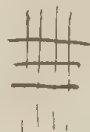
Ex. $f = A z^n = A(x+iy)^n \quad x=r \cos \theta$

$$= A r^n [\cos n\theta + i \sin n\theta]$$

$$u = r^n \cos n\theta$$

$$v = r^n \sin n\theta$$

$$n=1$$



$$n=-1$$

$$\varphi = \frac{A}{2} \cos \theta$$

$$\psi = -\frac{A}{2} \sin \theta$$

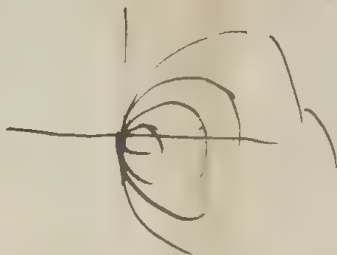
$$u = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$R = c \cos \theta$$

$$R^2 = c x = (x^2 + y^2)$$

$$(x^2 - \frac{c}{2})^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$$



dz

$$n=2$$

$$A r^2 \cos 2\theta = c$$

$$2A x y = c$$



$$n = 2A y$$

$$n=2$$

Lemniscate



$$R = \sqrt{\frac{c}{2A}}$$

$$f = i \mu \log z = i \mu \log(r e^{i\theta}) = i \mu [\log r + i \theta] = i \mu \log r - \mu \theta$$

$$\varphi = +\mu \theta$$

$$\psi = +\mu \log r$$

to są postępowe, a stojące:



Na obu stronach ~~zamkniętych~~ ^{otwartych} ~~zamkniętych~~ ^{otwartych} ~~zamkniętych~~ ^{otwartych}
cisnienie stale = 0

$$b=0$$

$$u = A \begin{cases} \cos \alpha t \cos \beta x \\ \sin \alpha t \sin \beta x \end{cases}$$

$$\alpha = \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$b = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = A \frac{\beta}{\alpha} \begin{cases} \sin \alpha t \cos \beta x \\ -\cos \alpha t \sin \beta x \end{cases}$$

$$b=0$$

$$\begin{matrix} x=0 \\ x=l \end{matrix}$$

$$b = \frac{\beta}{\alpha} (A \cos \alpha t + D \sin \alpha t) \sin \beta x$$

$$\beta l = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots = \frac{2\pi l}{\lambda} n$$

$$n = \frac{\lambda}{2l}, \frac{2\lambda}{2l}, \frac{3\lambda}{2l}, \dots$$

Na jednej stronie otwarte:

$$b=0$$

$$x=0$$

$$b = \frac{\beta}{\alpha} (A \cos \alpha t + D \sin \alpha t) \sin \beta x$$

$$u=0$$

$$x=l$$

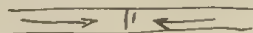
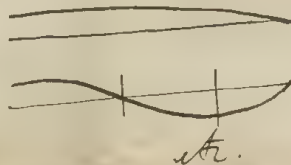
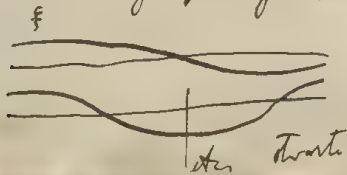
$$u = (A \cos \alpha t + D \sin \alpha t) \cos \beta x$$

$$\beta l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

$$n = \frac{\lambda}{4l}, \frac{3\lambda}{4l}, \frac{5\lambda}{4l}, \dots$$

więc misza oktawa, a pierwsze trzy tylko najwyższe

Tak samo z profanym przedstawieniem



Wszystkie trzy w tym samym kierunku, ale zwrócone,
w tym kierunku = wszystkie zwrócone w tym samym kierunku

hydrodynamic ρ_0 $\frac{680 - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 0.001} \cdot 1000}{1000}$
 Wzrosty przez "diaphragny"

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 = -\chi(P)$$

$$V^2 = 2 \frac{\rho_0}{\rho} \log \frac{\rho_1}{\rho_2} + \text{const}$$

$$0 = 2 \frac{\rho_0}{\rho} \log \frac{\rho_1}{\rho_2} + \text{const}$$

$$V^2 = 2 \frac{\rho_0}{\rho} \log \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

więc w każdym rozmiarze wartości prop.
 do gęstości gazu (przez Poincaré)

Drgania w masach: $v = w = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{\rho} \kappa \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} + u \rho_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} \right.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\rho_0 \kappa}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left| \quad a = \sqrt{\frac{\rho_0 \kappa}{\rho}} \right.$$

$$u = f_1(x + at) + f_2(x - at)$$

isothermami

$$\rho = \frac{\rho_0}{\rho_0} \rho$$

Gdyby a diathermami:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k = \frac{1}{\rho_0}$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\int \frac{dp}{\rho + \frac{1}{k}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa + 1} \frac{\rho_0}{\rho} \rho$$

$$V^2 = 2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{\rho_0}{\rho} \rho^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} + \text{const}$$

$$0 = \dots \rho_2$$

$$V^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{1}{k}} \rho_0 - \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{1}{k}} \rho_2 \right]$$

$$= \frac{\rho_0}{\rho_0} \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^k = \rho_0 \left[1 + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right]^k \approx \rho_0 (1 + k \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \kappa \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Gdybyśmy byli niegdyś przez Newtona:
 $\rho = \rho_0 \rho_0 = \rho_0 (1 + k)$
 toby było $a = \sqrt{ab}$
 (Newton - Laplace)

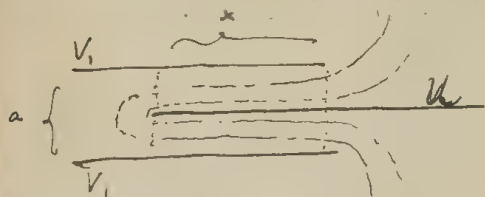
więc pomiar $\frac{\rho_0}{\rho} = a \theta$

$a = \sqrt{ab \kappa}$ niezależnie od warunków
 all temp.

wartości z tego można znaleźć κ

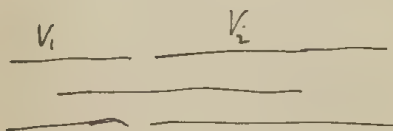
Štla dvočlajaca vo plyti prsmogltu rí ríoudygt v kondensatoru

127



$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 a x \left[\frac{2(V_1 - U)}{a} \right]^2 = \frac{x}{2a\epsilon_0} (V_1 - U)^2$$

$$F_x = \frac{(V_1 - U)^2}{2a\epsilon_0}$$

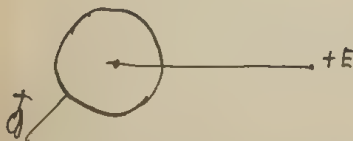


$$F_x = \frac{(V_1 - U)^2 - (V_2 - U)^2}{2a\epsilon_0} = \frac{V_1^2 - V_2^2 + 2U(V_1 - V_2)}{2a\epsilon_0}$$

$$= \frac{[(V_1 + V_2) + 2U](V_1 - V_2)}{2a\epsilon_0}$$

$$\text{zatím } \varphi = k(V_2 - V_1) \left[U - \frac{1}{2}(V_1 + V_2) \right]$$

v elektrometrické kondenzátoru



$$F = \frac{EE'}{(r - \frac{a^2}{r})^2} = \frac{E^2 a^2}{r^2 (r - \frac{a^2}{r})^2} = \frac{E^2 a^2 r}{(r^2 - a^2)^2}$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{EE'}{r - \frac{a^2}{r}} = \frac{1}{2} \frac{E^2 a^2}{(r^2 - a^2)}$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{E^2 a^2 r}{(r^2 - a^2)^2}$$

$$\text{Alebo teda } W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \varphi^2 = 2 \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0 x}{4\pi} \frac{U}{a} \right) \cdot U = \frac{U^2 x}{2a\pi}$$

$$\text{Hoffman } \frac{1}{3000}$$

$$T_{\text{Kopra}} = 5 \text{ cm}$$

if: i zina. 15 mg!



1. ~~rozmiar~~ lub wielkość ciążkości z jakiegokolwiek punktu $\rho_m \leq \frac{2}{3} \rho$ 128

2. Pot. kuli obrotowej z krążkami



3. Średnia wartość pot. jednych punktów na powierzchni kuli = pot. środkowej kuli

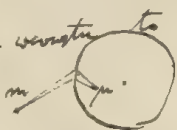
czyli

a) jeśli mamy mas



o wartości $\bar{V} = V_0$

b) jeśli są masę m wewnątrz kuli



$$\leq \frac{d \cdot \frac{4\pi}{3} \rho r^3}{2} + \frac{m \cdot \frac{4\pi}{3} \rho r^3}{\rho} = \frac{4\pi}{3} \rho r^3 + \frac{m}{\rho}$$

$$\sum \left(\frac{m}{R} + \frac{m}{\rho} \right) = \bar{V}$$

czyli średnia wartość pot.

4. Wyprowadzenie natężenia pola kuli rozciągającej się od R_1 do R_2

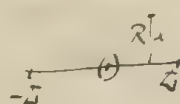


$$4\pi R^2 f = 4\pi R^2 \rho$$

$$= \frac{4\pi R^2 \rho}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr$$

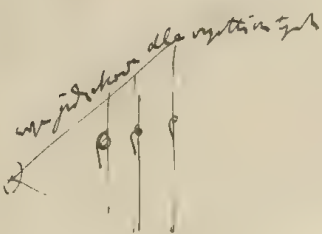
5. Pot. w punkcie $\rho \log \frac{x+L + \sqrt{(x+L)^2 + R^2}}{x-L + \sqrt{(x-L)^2 + R^2}}; -2\rho \log R + \rho \log [2x + \sqrt{(2x)^2 + R^2}] [2x + \sqrt{(2x)^2 + R^2}]$
 $x > L$ $+L > x > -L$

$$\rho \log \frac{L - x + \sqrt{(L-x)^2 + R^2}}{L+x + \sqrt{(L+x)^2 + R^2}} \quad x < L$$

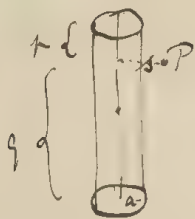


$$\frac{1}{\infty} = -2\rho \log R$$

↑ natężenie pola w punkcie $x=R$ jest równe



3. Walec (przekrój)



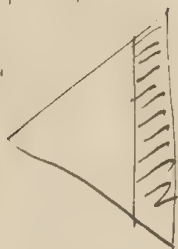
$$\begin{aligned} V_i &= 4\pi\rho \cdot \int_0^h \left(\frac{2\sqrt{h^2 - z^2}}{a} \right) dz \\ V_e &= 4\pi\rho \cdot \int_0^h \left(\frac{2\sqrt{h^2 - z^2}}{s} \right) dz \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} V_i \\ V_e \end{aligned}} \right\} ?$$



$$2\pi \int_0^h r dr dz \int_0^{2\pi} \left(x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2 + s^2 - 2cs\cos\varphi} + r^2 \sin^2\varphi \right) d\varphi$$

↓
jako to przedstawić to można
dzięki symetrii. Zatem
zatem (zatem!)

4.



drumień stożka

8. Walec masywny (sfera) $V_2 = 2\pi\rho a^2 \int_0^h \frac{2\sqrt{h^2 - z^2}}{s} dz$

oraz ∞
 $= -2\pi\rho a^2 \int_0^h \frac{2\sqrt{h^2 - z^2}}{s} dz$

$$V_i = 2\pi\rho a^2 \int_0^h \frac{2\sqrt{h^2 - z^2}}{a} dz + \left(\frac{2\pi\rho a^2}{s} \right) \left(\frac{2\pi\rho a^2}{s} \right) = \pi\rho a^2 (1 - 2\frac{h}{a}) - \pi\rho a^2$$

Sfera ma punkt w osi! (2 punkty)

trójkąt linia z osi znowu z osi

9. Sfera ma osi symetrii znowu która przechodzi przez środek sfer i jest prostopadła do osi symetrii



$$\frac{2\pi\rho a^2}{s} \int_0^h r dr dz \left[\frac{1}{2} (R^2 + R^2 - 2R\cos\varphi) \right]$$

zatem 2

$$= \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \cos\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \int_0^{\pi/2} 2\pi r^2 R dz$$

$$= \pi r^2 R$$

Kugelsymmetrisches Feld

109

$$\int_0^{\infty} 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = \frac{16}{3} \pi \rho^2 \int_0^a r^2 dr$$

$$W = \frac{16}{15} \pi \rho^2 a^5 \quad \left. \vphantom{W} \right\} \bar{W} = \frac{4}{5} a^2 \rho g$$

$$g = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 10^{39} \text{ erg} = 5 \cdot 3 \cdot 10^{28} \text{ cal}$$

Weglänge
Kugel o. Kugel

$$\Delta \sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \Sigma m_k$$

$$\frac{1}{r^2} \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

$$\Phi = -r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r^2}$$

$$4\pi r^2 \rho' = -r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

$$r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -4\pi r \rho$$

physikal. Feld hat no. in der

$$\frac{1}{r^2} \int dr \cos \theta = \dots$$



Stärke no. in der

$$\sqrt{x^2} \dots$$



Stärke Kugel

Feld physikal. phys. Feld. Feld ist physikal. Feld in der

$$\Sigma m_k \frac{\Delta}{2} = \Sigma m_k = \frac{1}{2} \Sigma m_k$$



$$\int_0^a \frac{dy}{y} (L - x + \sqrt{(x-a)^2 + a^2 - 2ax \cos \varphi})$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{L}{a} - \dots$$

$$\int_0^a \frac{dy}{y} \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi} \quad \omega$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dy}{y} (1 - a \cos \varphi) = \frac{2\pi}{10^4} \dots$$

Then with production. per hour $\frac{4 \text{ cal}}{\text{sec}} \text{ no. cm}^2$

$$4\pi (150 \cdot 10^{11})^2 \cdot 4 \cdot 864 \cdot 10^3 \cdot 365 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 10^7 = 1.6 \cdot 8.6 \cdot 3.6 \cdot 4.2 \cdot 32 \cdot 10^{40}$$

$$15 \cdot 9 \quad 28 \cdot 4.4 \cdot 3.$$

$$\frac{13.48}{624} = 6.2 \cdot 10^{42}$$

$$W = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \quad \frac{16}{15} a^5 \pi^2 \kappa \rho^2$$

$$= \frac{3}{5} a^3 \pi \rho \quad = \frac{7}{5} M a^2 \pi \kappa \rho$$

$$= \frac{3}{5} \frac{M^2 \kappa}{a}$$

$$\delta U = \frac{8}{5} M a^2 \pi \kappa \left(\frac{\delta a}{a} \right)$$

$$= 2 W \left(\frac{\delta a}{a} \right)$$

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{1}{2W}$$

$$M = 2 \cdot 10^{27} \text{ ton} = 2 \cdot 10^{27} 10^6$$

$$a = 0.7 \cdot 10^6 \text{ km} = 7 \cdot 10^{10}$$

$$\kappa = 0.6 \cdot 10^{-8}$$

$$W = \frac{4}{3} \pi \cdot 86 \cdot 5 \cdot (10^6)^3 \cdot 2 \cdot 10^{33}$$

$$= 4.8 \cdot 10^{48}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 10^{48}$$

$$\left(\frac{\delta a}{a} \right)_{\text{max}} = \frac{6.2 \cdot 10^{42}}{8.6 \cdot 10^{48}} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-14}$$

$$\frac{W}{\Delta} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{48}}{6.2 \cdot 10^{42}} = \frac{1}{3} 10^6 \text{ lat}$$

$$g_a(1-\delta) + \frac{c}{R_0} \left[1 - 2\frac{z}{R} \omega y + \left(\frac{z}{R}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\omega^2}{2} R^2 \left[1 - \frac{2z}{R} \omega y \right]^2 =$$

$$g_a(1-\delta) + \frac{c}{R} \left[1 + \frac{2}{R} \omega y - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{R}\right)^2 (1-3\omega y) \right] + \frac{\omega^2 R^2}{2} \left[1 - \frac{2z}{R} \omega y + \left(\frac{z}{R}\right)^2 \omega y^2 \right] =$$

$$\frac{c}{R^2} = \omega^2 R$$

$$= g_a(1-\delta) + \omega^2 R^2 \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{R}\right)^2 (1-3\omega y) \right]$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 - \frac{5}{16} x^3 + \dots$$

$$= U_0 - g_a \delta + 2\omega^2 R^2 \omega y^2$$

$$\delta = \frac{2\omega^2 a^2 \omega y}{g}$$

$$\frac{c}{R^2} = \omega^2 R = \frac{M_0}{M_8} \left(\frac{a}{R}\right)^2$$

$$2 \left(\frac{2\pi}{86400} \right)^2 \cdot \frac{6360 \cdot 10^5}{10^3} = 2 \left(\frac{\pi}{432} \right)^2 \cdot 636 \cdot 10^{-8+3+5-3}$$

$$\omega^2 = \frac{M_0}{M_8} \frac{a^2}{R^3}$$

$$\delta = 2 \frac{M_0}{M_8} \frac{a^3}{R^3} \frac{\omega y}{g}$$

$$F = \mu \frac{\partial u}{\partial x} l$$

$$u, \mu, \rho, a$$

$$\mu \frac{l}{t^2} = \mu \frac{l^2}{t^2}$$

$$\mu \left[\frac{l}{t}, \frac{m}{lt}, \frac{m}{l^3}, l \right] = \varepsilon$$

$$\mu = \frac{m}{lt}$$

$$\varepsilon = \frac{u \rho a}{\mu}$$

$$\frac{l^2}{m} \frac{m}{l^3}$$

Reynolds

$$\varepsilon = \frac{u_0 a \rho}{\mu} = 1000$$

$$u_0 = 20^\circ \quad 0.01$$

$$\text{plasma } u_0 = 10$$

$$\text{Kerosin } 0.22$$

$$\text{ster } 0.0026$$

$$\text{stg } 0.016$$

$$\text{maka } 10^6 \approx$$

$$u_0 = \frac{h_1 - h_2}{\rho \mu l} R^2$$

$$\frac{\Delta p a^3 \rho}{\mu l^2} \approx 1000$$

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{1000 \cdot 10^{-4}}{a^3} = \frac{0.8}{a^3}$$

$$l = 10 \quad a = 10^{-1}$$

$$\Delta p = 80, \quad \mu = 80 \cdot 0.7 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Bodenw } 18^\circ$$

$$18^\circ$$

$$u_0 = 0.0015$$

$$a =$$

5. Beispiel

$$h_1 - h_2 = \frac{u^2 l}{2} \rho$$

prawdy iedy ^{o dyfuzji} δ lubo w granach $0 \rightarrow +\delta$:

$$= \sqrt{\frac{V}{2\pi}} \int_0^{\delta} e^{-\frac{Vx^2}{2}} dx$$

średnie odchylenie $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{V}{2\pi}} \int_0^{\delta} x e^{-\frac{Vx^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$

~~1/2~~

śred. w. i. śred. kw. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Jżeli standard odchylenia jest z granic otrzymamy $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, więc kapotał wynosi a :

Prawdy, że po n wartości odchylenia ^{dotyczy} $> b-a$:

$$\sum_{n=b-a}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{n^2}{2}} = \int_{\frac{b-a}{n}}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{x^2 n}{2}} dx$$

a wówczas $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ jest między innymi średnim odchyleniem $-a$

prawdy, że przy n wartości $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ jest średnim odchyleniem $-a$:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{\frac{a}{n}}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\frac{a}{\sqrt{n}}}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\frac{a}{\sqrt{n}}}^{\infty} e^{-z^2} dz + \dots = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} dy \int_{\frac{a}{\sqrt{2y}}}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$a_1 = \frac{1}{E} [X_x - \mu(Y_1 + Z_2)]$$

$$b_2 = \frac{1}{E} [Y_1 - \mu(X_x + Z_2)]$$

$$c_3 = \frac{1}{E} [Z_2 - \mu(X_x + Y_1)]$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{E} [X_x - \mu(Y_1 + Z_2)] \\ b_2 + c_3 = \frac{1}{E} [(1-\mu)(Y_1 + Z_2) - 2\mu X_x] \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1-\mu \\ \mu \end{array}$$

$$a_1(1-\mu) + \mu(b_2 + c_3) = \frac{1}{E} [(1-\mu) - 2\mu^2] X_x$$

$$X_x = \frac{E}{1-\mu-2\mu^2} [a_1(1-2\mu) + \mu(a_1 + b_2 + c_3)]$$

$$X_x = \frac{E}{1+\mu} \left[a_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} (a_1 + b_2 + c_3) \right]$$

$$X_y = \frac{E}{2(\mu+1)} (a_2 + b_1)$$

etc.

~~$$X_x = \frac{E}{1+\mu}$$~~

$$X_x = 2T \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + L \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right]$$

$$Y_1 = \dots$$

$$X_y = T \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

$$\dots$$

$$\frac{E}{2(\mu+1)} \left[1 + \frac{\mu}{1-2\mu} \right] = \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$2 \text{ kro}: \rho \frac{\partial \xi}{\partial x} = \rho X + T \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + T(1+2L) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = a_1 + b_2 + c_3 = \text{umowa obytowa} = 0$$

Teraz nie stric dla naszego ciała, dla porównania musimy być dane oty
proporcjonalne t.j. λ Y Z , natomiast w równaniu $X = X_{12} + X_{13} + X_{14} + \dots$ etc

Tęto jedno rozszerzenie możliwe jest, to sumujemy dane, co Kirchhoff dowodzi

Ondro wcina nasz bo wiemy, że tylko w jakimś bądź innym odpowiednim
jakimś uwarunkowaniu to może być jedynie możliwe.

[Np. wzajemne wyznaczenie położenia dla
 $X_1 = \text{ant}$ $X_2 = \text{ant}$ etc. stępnymy odchyłki jednostek $\xi = \dots$

Potencjał $W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{1}{r_{ij}^0} \right) + \dots$

Wynik to naturalnie tylko wiemy, że istnieje i jest jednostkowym
i równokierunkowym. Krystalizacja ma być w najogólniejszym wypadku
jedną z nich symetrii miedzy innymi 26 symetrii

W systemie równoległym mamy 3 symetrii (sól, fluor, ~~et al.~~)
miedzi, nikiel etc.
tutaj tylko dwa.

Wskazanie i te właściwości są równoległe. tylko tworzą conglomerat krystaliczny
krystaliczny (tylko niektóre np. srebro, miedź nie mogą istnieć krystalicznie).

Coś się dzieje z tymi 1. symetriami dwójnymi, a nie dla wszystkich właściwości

Na podstawie teorii molekularnej [- - -]

Wskazanie się nieprawdopodobnie.

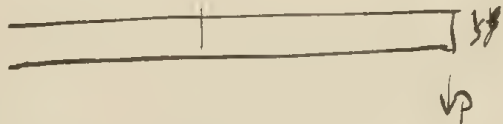
Trzeba pamiętać, że ^{polaryzacja} krystalizacja jest.

Wyprowadzić wzór na odkształcenie i jej wartość jeżeli wytrzymałość maksymalną będzie przekroczyć wartość

$$\frac{\Delta \sigma' - \Delta \sigma}{\Delta x} = \frac{\gamma}{R}$$

którą jeżeli $\frac{\gamma}{R} = \text{const} = c$

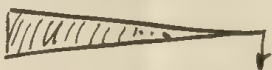
I).



$$\frac{1}{R} = \frac{\gamma}{y}$$

$$P(l-x) = \frac{E\Theta}{R} = \frac{E\Theta}{y} \alpha y^2 = \alpha y$$

$$y \propto (l-x)$$



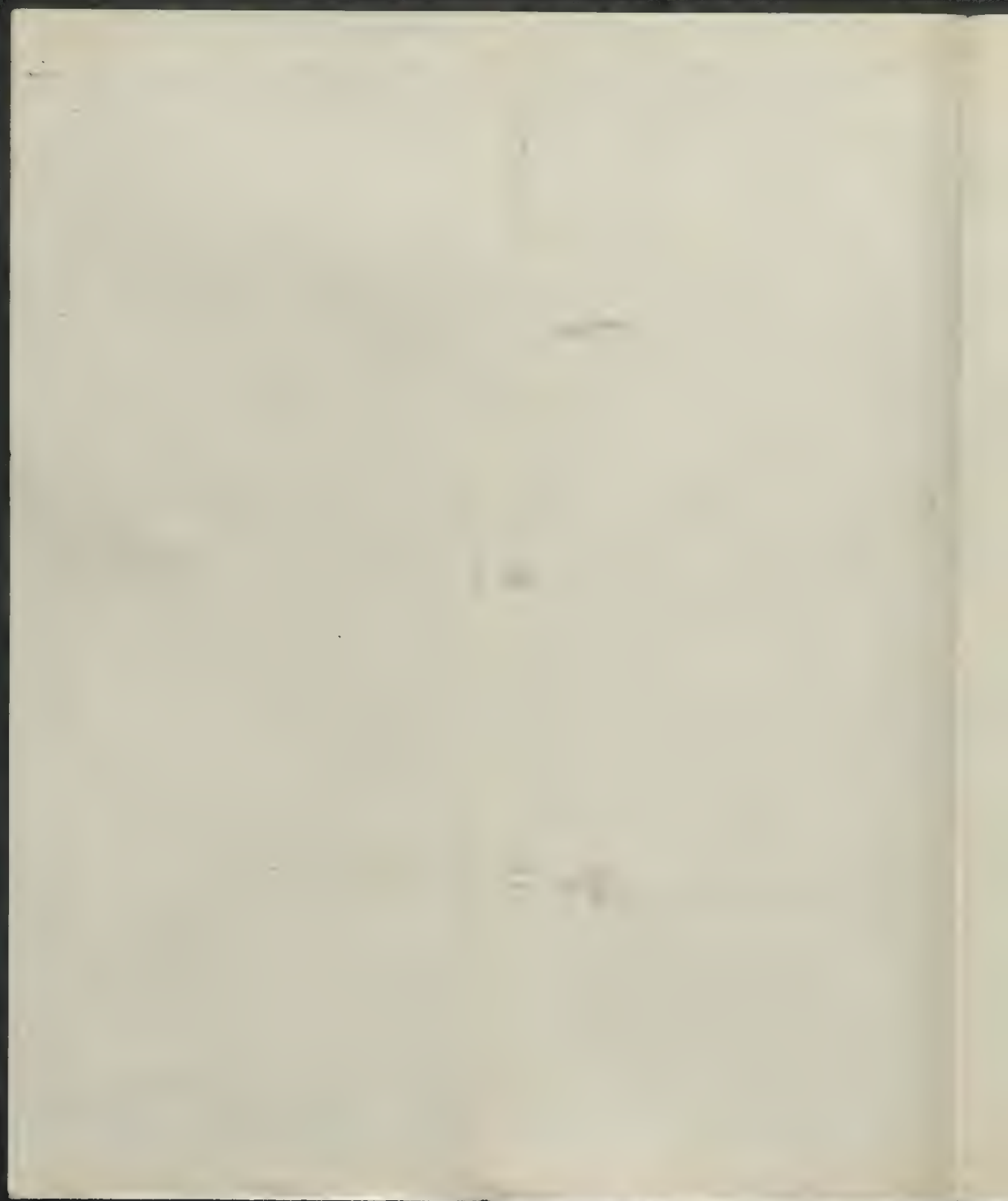
II. $\int_x^l p \xi (l-x) d\xi = \alpha y$ jeżeli $p = \text{const}$

$$= p \left(\frac{l^2 - x^2}{2} - l^2 + x^2 \right) = p \frac{l^2 - x^2}{2}$$

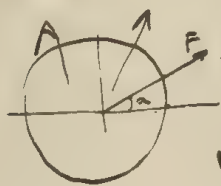


$$p = \alpha(l-x)$$

$$\int_x^l (l-\xi)(\xi-x) \alpha d\xi = \alpha \left[\frac{l^3 - x^3}{3} - \frac{l^2 - x^2}{2} \right]$$



Węzły tarcz ~~7~~ ^{drugi} ~~7~~ ^{więzi}



$$P = \int_0^{\pi} F \sin \alpha \, da = \frac{2Fa}{2}$$

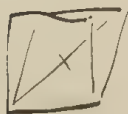
to samo z prz. $2\pi a F da = P 2\pi da$

$$F = q \omega a$$

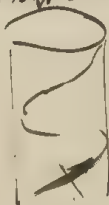
$$\frac{P}{2} = \omega a^2$$

$$P = aF$$

$$\frac{P}{2} = \omega a^2 \quad // \quad a = 1m \quad \omega < 600 \quad n = 100$$



Skrypt wolum; przyka i yowinow.



Obliczenie tarcz dla ciębnij

nowy

$$F \parallel \frac{aF}{\pi \delta} < \dots$$

$$555 \quad \cdot 981, 10^6$$

cyfry. ^{dużo} ~~0.9~~ $0.9 \frac{ton}{cm^2}$

izolow 400

stal (stano) 240

stalo 0.6

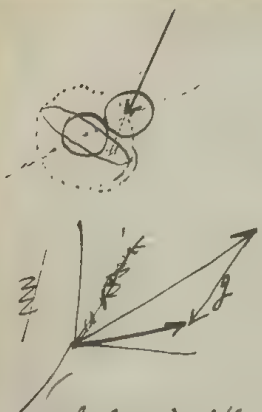
stalo 1.2

molecular myocard

$$f(\xi, \eta, \zeta) f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) d\xi d\eta d\zeta$$

$$n g b db d\epsilon$$

$$b db d\epsilon = b^2 db \sin \theta$$



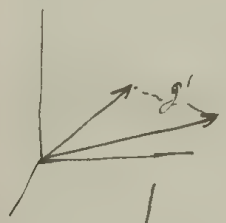
$$\dots d\theta$$

$$\dots d\phi$$

$$\int f(\xi, \eta, \zeta) f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) n g b db d\epsilon d\xi d\eta d\zeta d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 d\theta d\phi$$

$$\xi' = \xi + \xi_1 - \xi \cos \theta + \sqrt{g^2 - (g - \xi)^2} \sin \theta \cos \phi$$

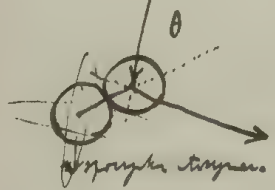
pressure reduction



$$\int f(\xi', \eta', \zeta') f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) g' b' db' d\epsilon' d\theta' d\phi'$$

We would state any joint

$$\int (f f' - f' f') \dots = 0$$



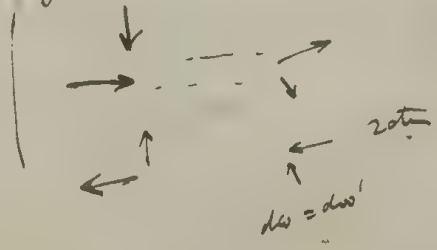
symmetry $g = g'$
 $b = b'$

$$\frac{e^{-(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} - e^{-(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)}}{e} = e^{-(\xi'^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + \xi_1^2 + \eta_1^2 + \dots)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \int f f_1 d\xi_1 \dots - \int f' f'_1 d\xi'_1 \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = - \int (f f_1 - f' f'_1) d\xi_1 \dots$$

Cartesian and spherical
joint and spherical



symmetry in the direction
 $d\xi = d\xi'$
differential eq. 26

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C^3 e^{-\frac{3-v-v^2}{\alpha}} dv da = 1$$

$$7\pi v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha}} dv$$

$$\frac{1}{v^4} e^{-\frac{v^2}{\alpha}} dv$$

$$\frac{\partial}{\partial v} (v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha}}) = 0$$

$v = \alpha$

$$H = \int f \log f dv$$

$$\frac{dH}{dt} = \int \frac{\partial f}{\partial t} \log f dv + \int \frac{\partial f}{\partial t} dv$$

$= \frac{\partial}{\partial t} \int f dv = 0$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} = \int (f' f_1 - f f_1') b db d\mathbf{r} d\mathbf{v}_1 \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \int \log f (f' f_1 - f f_1') b db d\mathbf{r} d\mathbf{v}_1 \\ &= \int \log f_1 (f' f_1 - f f_1') b db \dots \end{aligned}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2} \int \log f f_1 (f' f_1 - f f_1') b d\mathbf{r} \dots$$

$$= \frac{1}{2} \int (\log f f_1' - \log f f_1) (f' f_1 - f f_1') b \dots$$

$$= - \frac{1}{2} \int (\log f f_1' - \log f f_1) (f_1 - f_1') b \dots$$

$$H = \int f \log f dv$$

$$= \int \log f (f' f_1 - f f_1') b \dots$$

II Ebene ist thermodynamisch

Sten räumliche Temperatur $\theta = \text{const}$

Clemens $\frac{n m c^2}{3} = p$ $c = \sqrt{3R\theta}$

Navier-Stokes Gleichung

$$\gamma(\xi, \eta, \zeta) = \gamma(\xi, \eta, \zeta)$$

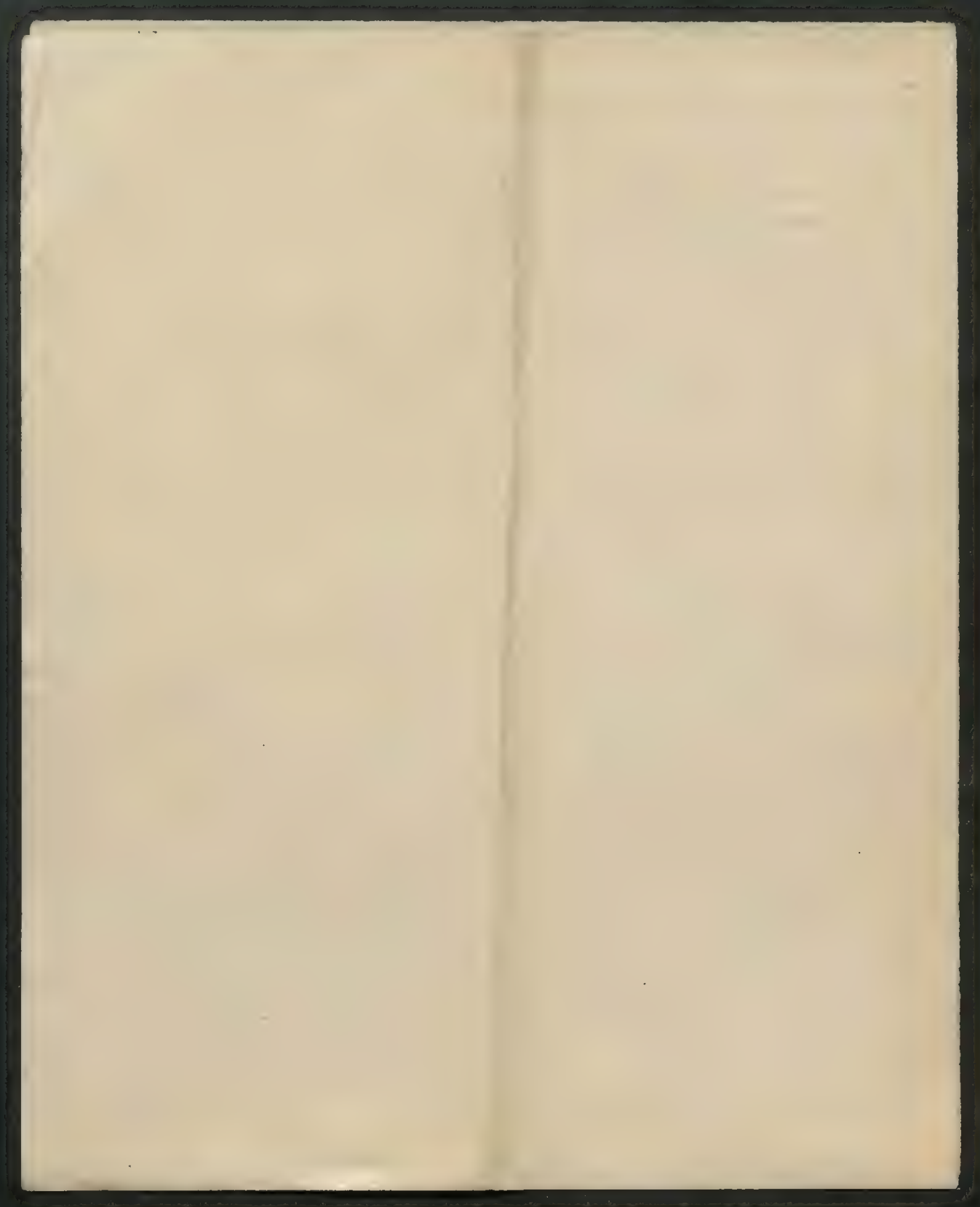
$$\gamma(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{\alpha^{3/2}} e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\alpha^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} + \frac{d}{dt}$$

$$\bar{c}^2 = \frac{3}{2} \alpha^2$$

$N(\xi, \eta, \zeta)$ der f. der \bar{c}^2 $\frac{b}{g} \frac{d\theta}{dt}$





er berufen uns auf die seitens der Mechanik ausführlich begründeten, daß die Zustände, welche ein im t befindliches System durchläuft, chen Zustandsverteilung entsprechen, Wahrscheinlichkeit eines bestimmten, oordinaten q und die Momente p ustandes des Systems (welches in e den betrachteten Körper und das e Temperaturbad umfaßt) bestimmt e Boltzmann-Gibbssche Formel:

$$\frac{N}{H\Theta} E dq_1 dq_2 \dots dp_1 dp_2 \dots dp_n, \quad (3)$$

die der betreffenden Konfiguration e Gesamtenergie bedeutet. Integriert Ausdruck nach allen Variablen mit er (mit einem q identischen) Ko- welche die Abweichung des Systems ustande definiert, so erhält man für er Systeme, welche zwischen ε und r einen Ausdruck

$$dW = a e^{-\frac{N}{H\Theta} \varepsilon} d\varepsilon, \quad (4)$$

bei Verschiebung der Koordinate ε rachteten Zustand in den normalen tztzustand geleistete Arbeit bedeutet. a im allgemeinen eine Funktion ur dann genau konstant, wenn die e so gewählt ist, daß sie in der ie E ausschließlich in dem Aus- orkommt. Dies erfordert vor allem, t Veränderung von ε zusammen- netische Energie sich (in dem in menden Bereiche) als $L = \alpha \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2$, on ε unabhängigen Koeffizienten α

Praxis kann man meist durch ein es Kriterium über die Konstanz des zw. über die Zulässigkeit der Wahl ate ε entscheiden. Denkt man sich auf Veränderung der Koordinate ε

Kraft $-\frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon}$ durch eine genau gleiche, engegesetzte Zusatzkraft aufgehoben, st von vornherein klar, ob in diesem „astatischen“ System alle Werte a wahrscheinlich sind, ob also in

diesbezüglich zu einem kommen übereinstimmen. Die von mir abgeleitet einen von der Einst Zahlenkoeffizienten, doc stande nie eine Bedeuti die dabei verwendete Be den Vorteil, daß sie ein den eigentlichen Mecha Bewegung gibt als die weniger anschaulichen thoden, aber ihre Anwe führung gewisser rechne — wie leider so viele schen Gastheorie —, Zahlenkoeffizienten be handelte sich nun dama Form und die Größen und man vermutete ga haupt auf diesem Gebie telle Messungen ausfü wenige Jahre nachher, und seinen Mitarbeitern Heute besteht wohl ke der von Einstein ange großer Annäherung ric allgemein für die innerl mittlere Änderung der

$$V \overline{A^2} = \sqrt{}$$

wo B die Bewegliche reziproken Wert des R cher einer mit der G genden Änderung der entgegenwirkt. Hand translatorische Bewe

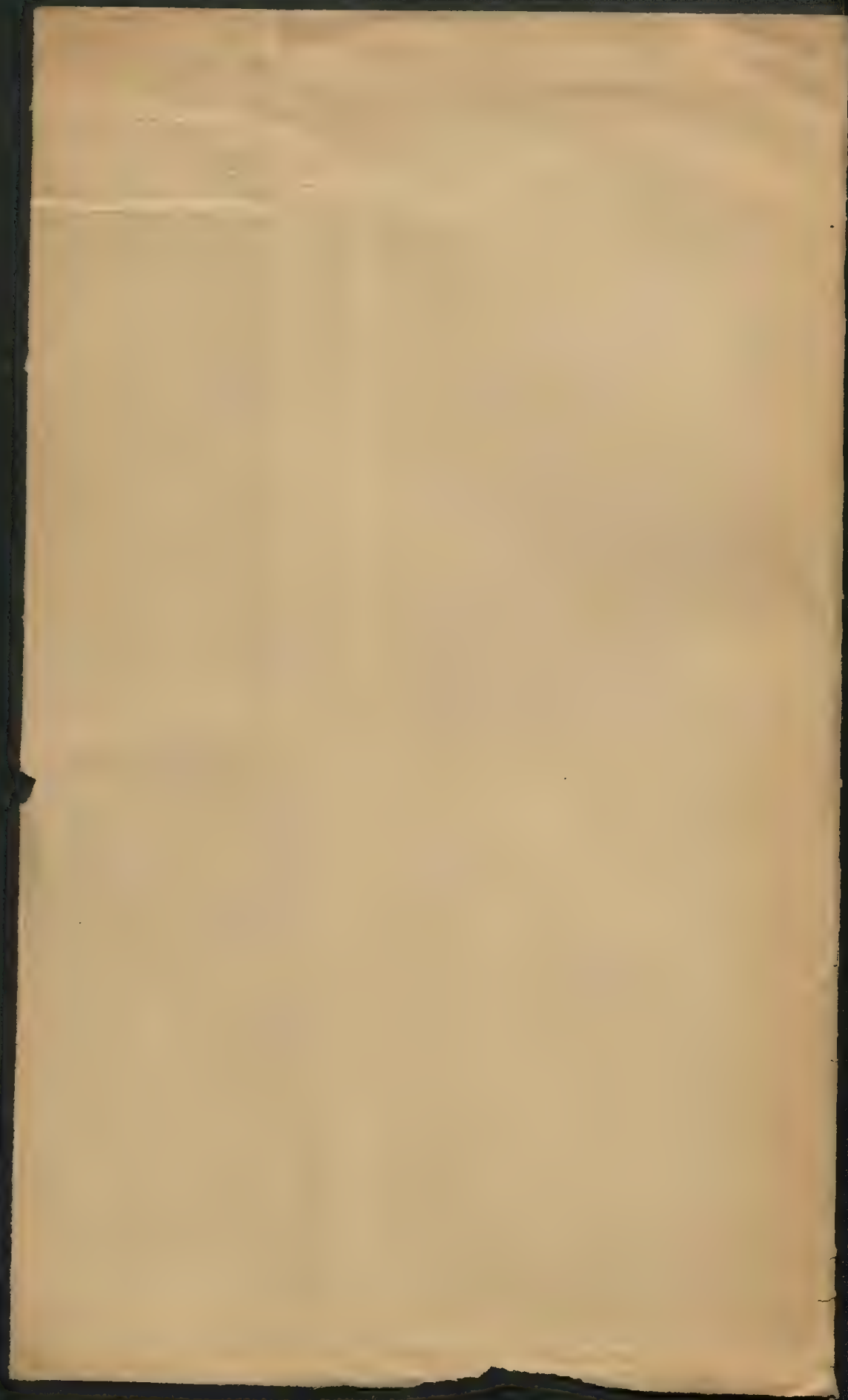
$$\text{ist } \frac{1}{B} = 6\pi\mu a, \text{ bei}$$

$$\frac{1}{B} = 8\pi\mu a^3, \text{ ebenso 1}$$

den Werte für andere idische Gestalt, leicht

Wie schön, wie al Abhängigkeit von μ , t wert der Konstante) un theoretischen Formeln Svedberg, Perrin, browski, Seddig u durch Zangger und B darauf brauche ich we zugehen. Es sind ja suchungen Perrins un wiß hinreichend bekan wirklich ein ganz klass die kinetische Atomist die uns hier interessier

§ 6. Auch die von Vermutungen betrefß der Brownschen Bewe Gasen schweben, sind



Hydrogonium.

der Form nach voll-
 enden Resultate geführt.
 Die Formel enthielt zwar
 Einsichten verschieden
 Ich habe ich diesem Um-
 ang beigemischt. Denn
 rechnungsart bietet zwar
 en besseren Einblick in
 nismus der Brownschen
 e übrigen, physikalisch
 und mehr indirekten Me-
 ndung erfordert die Ein-
 rischer Vereinfachungen
 Rechnungen der kineti-
 welche den Wert des
 einflussen müssen. Es
 ls nur um die allgemeine
 ordnung des Resultates,
 r nicht, daß sich über-
 te so exakte experimen-
 ren lassen, wie solche
 namentlich von Perrin
 angestellt worden sind.
 n Zweifel darüber, daß
 egebene Zahlenfaktor mit
 htig ist, daß man also
 halb der Zeit t eintretende

$$\frac{2H\Theta}{N} \sqrt{Bt}, \quad (5)$$

t bedeutet, das ist den
 ibungswiderstandes, wel-
 chwindigkeit Eins erfol-
 betreffenden Koordinate
 lt es sich also um
 ng einer Kugel, so

rotatorischer Bewegung

lassen sich die betreffen-

Fälle, z. B. eine ellipso-

berechnen.
 seitig (in bezug auf die
 , a , sowie den Absolut-
 d quantitativ genau diese
 durch die Arbeiten¹⁾ von
 Chaudesaignes, Do-
 a., in letzter Zeit auch
 Chi bestätigt worden sind,
 ohl hier nicht näher ein-
 namentlich die Unter-
 d seiner Mitarbeiter ge-
 nt, dieselben bilden auch
 isches Beweismaterial für
 ik und insbesondere für
 enden Theorien.

mir seinerzeit geäußerten
 der Existenz und der Art
 ngung an Teilchen, die in
 voll bestätigt worden

sagten, ahnten wir gar nicht, daß sich das Ex-
 ponentialgesetz und der Wert des Exponenten
 mittels der einfachen und sinnreichen, kurz
 nachher von Perrin angewendeten Versuchs-
 methoden so genau kontrollieren und bestätigen
 lassen würden, daß dies sogar eine der ge-
 nauesten Bestimmungen der Avogadro'schen
 Konstante N ermöglichen würde.

§ 8. Der normale Fall eines stabilen Gleich-
 gewichts entspricht offenbar einer in 2 quadra-
 tischen Gestalt der Potentialfunktion $\chi(x)$, also
 z. B. einer elastischen, in die Ruhelage zurück-
 treibenden Kraft. In diesem Falle sind zufolge
 Formel (4) die molekularkinetischen Abweichun-
 gen von der normalen Gleichgewichtslage nach
 dem Gauß'schen Fehlergesetz verteilt, und die
 mittlere Abweichungsarbeit beträgt

$$A = \frac{1}{2} \frac{H\Theta}{N} = 2,05 \cdot 10^{-14} \text{ Erg.}$$

Als Beispiel führen wir vor allem die schon
 vorher erwähnten Schwankungen¹⁾ der Gasdichte
 um den normalen Mittelwert an. Die bei (iso-
 thermer) Kompression vom spezifischen Volum
 v auf den Normalwert v_0 geleistete Arbeit be-
 trägt nämlich pro Masseneinheit einer Substanz,
 welche einem äußeren Druck p_0 unterliegt,

$$\int_{v_0}^v (p - p_0) dv = \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_0 \frac{(v - v_0)^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_0 \frac{(v - v_0)^3}{3!} + \left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3} \right)_0 \frac{(v - v_0)^4}{4!} + \dots \quad (6)$$

Wird das Verhältnis der Anzahl der momentan
 in einem gewissen Volum V befindlichen Mole-
 küle n zu der auf dasselbe Volum entfallenden

Normalzahl ν mit $\frac{n}{\nu} = 1 + \delta$ bezeichnet, so

folgt aus obigen Formeln bei Beschränkung auf
 das erste Glied der Reihe (6), daß das mittlere
 Quadrat der positiven oder negativen Verdich-
 tung

$$\overline{\delta^2} = \frac{H\Theta}{N} \frac{\beta}{V} \quad (7)$$

beträgt, wo β den isothermen Kompressibilitäts-
 koeffizienten $\beta = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p}$ bedeutet.

Im Falle der Gültigkeit des Boyle-Charles-
 schen Gesetzes reduziert sich diese Formel auf
 die einfache, schon vorher erwähnte (2) Gestalt

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{\nu}; \text{ sonst müssen natürlich molekulare}$$

Anziehungskräfte die Neigung zu Schwarm-
 bildung vermehren, dagegen müssen die Eigen-
 volumina der Moleküle oder überhaupt ab-
 stoßende Kräfte im entgegengesetzten Sinne
 wirken.

Interessant ist auch der Fall, wo dem

$$b_2 = b_1 + a \tan \varphi$$

$$b_1 + \frac{a}{2} \tan \varphi = \varepsilon b$$

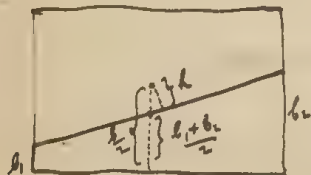
$$\frac{b_1 + b_2}{2} \rho = \varepsilon \phi b$$

$$b_1 = \varepsilon b - \frac{a}{2} \tan \varphi$$

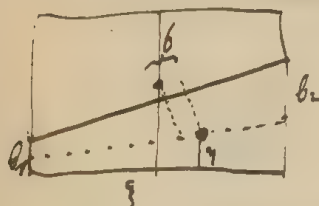
$$b_2 = \varepsilon b + \frac{a}{2} \tan \varphi$$

$$b_2 - b_1 = a \tan \varphi$$

$$I = a b \varepsilon$$



$$h = \frac{b - b_1 - b_2}{2} \cos \varphi$$



$$b = \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi - b_1 \sin \varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{(b - b_1)^2}{2} - h \tan \varphi \right) = \frac{a}{2 \cos \varphi}$$

$$b = \xi \cos \varphi - \frac{a}{2 \cos \varphi} + \sin \varphi \left\{ \eta - b_1 - \frac{b}{2} + \frac{b_1 + b_2}{2} \right\}$$

$$\xi = \frac{2a}{3} \frac{b_2 + \frac{b_1}{2}}{b_1 + b_2} = \frac{\frac{2a}{3} \frac{3\varepsilon b}{2} + \frac{a}{4} \tan \varphi}{2\varepsilon b} = \frac{a}{2} + \frac{a^2 \tan \varphi}{12 \varepsilon b}$$

$$\eta = \frac{b_1}{2} + \frac{a}{2} \frac{b_2 - b_1}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon b}{2} \pm \frac{a}{4} \tan \varphi + \frac{\xi}{2} \tan \varphi = \frac{\varepsilon b}{2} - \frac{a}{4} \tan \varphi + \frac{a}{4} \tan \varphi + \frac{a^2}{24 \varepsilon b} \tan^2 \varphi$$

$$b = \frac{a \cos \varphi}{2} + \frac{a^2 \tan^2 \varphi}{12 \varepsilon b} \cos \varphi - \frac{a}{2 \cos \varphi} + \sin \varphi \left\{ \frac{\varepsilon b}{2} + \frac{a^2 \tan^2 \varphi}{24 \varepsilon b} - \frac{b}{2} + \frac{a \tan \varphi}{2} \right\}$$

$$= \frac{a}{2} \left[\cos \varphi - \frac{1}{\cos \varphi} + \sin \varphi \tan \varphi \right] \left(\frac{\varepsilon b}{2} \right) \sin \varphi + \frac{a^2}{12 \varepsilon b} \tan^2 \varphi \sin \varphi \left[1 + \frac{\tan^2 \varphi}{2} \right]$$

$$b = \frac{a}{2} \sin \varphi \left[\frac{\varepsilon b}{2} + \frac{a^2}{12 \varepsilon b} \left(1 + \frac{\tan^2 \varphi}{2} \right) \right]$$

$$\text{note: } \frac{a^2}{6 \varepsilon b} > b \\ a > b \sqrt{6 \varepsilon (1 + \tan^2 \varphi)}$$

Stale równoważ. ośi

$$b > a\sqrt{6\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

już $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$b > a\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{czyli kwadrat bity nieustoi! ?}$$

Stale" już do rzutu 2 kątów ρ , naturalnie tytuś uśmiech się do ρ -użyty $\frac{1}{2}$



o rotacji ośi $b < a\sqrt{6\varepsilon(1-\varepsilon)}$

przypadek niejednorodny bity nieustoi!

dla $a=b$ tożsamość $\pm \varepsilon - \varepsilon^2 < \frac{1}{6}$

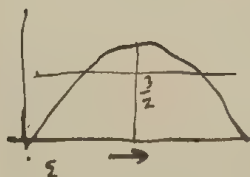
$$\varepsilon^2 - \varepsilon = -\frac{1}{6}$$

$$\varepsilon = \pm \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$$

$$\varepsilon = \pm \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{12}} =$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$= 0 \quad 4$$



$$\begin{array}{r} 6990 \\ 0794 \\ \hline 6198-2 \\ 08099-1 \\ 0.6454 \\ -0.5 \\ \hline \varepsilon = 0.1454 \\ 1.0792 \\ 0.5396 \\ 0.4604-1 \\ 0.3 \\ 0.2886 \end{array}$$

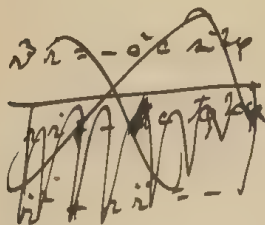
Punkt springi harmonisk

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

zu stat. position? springung, also rille

$$h \ddot{r} = -a^2 \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$r^2 \dot{\varphi} = c$$



$$3r^2 \dot{r}^2 + r^2 \ddot{r} = -2a^2 \cos 2\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$= -2c r^2 \dot{\varphi} = -2c^2$$

$$\ddot{r} = r \dot{\varphi}^2 = \frac{c^2}{r^3}$$

$$\ddot{r} = -\frac{2c^2 - 3r^2 \dot{r}^2}{r^3} = -\frac{c^2}{r^3}$$

$$F_{r2}$$

$$= -\frac{3}{r^3} (c^2 + \underbrace{r^2 \dot{r}^2}_{a^4 \dot{\varphi}^2 r^2 \cos^2 2\varphi})$$

$$a^4 \dot{\varphi}^2 (a^2 - r^2)$$

$$c^2 + a$$

Zasada najmniejszego działania

Z. Weber

prędkość (Zasada)

Nad

Skut i prędkość białej kulki iant Vanta

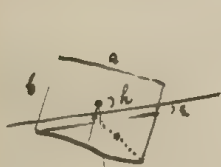
Symetryczna deformacja ciałach kulisty lub wielokątny.

Wpływa ciżm i wpływa składowa konstrukcyj. roko.

Główne właściwości
Kształtu, Kształtu

$$\rho = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \left[1 + \frac{a^2}{3b^2} - 2h \right]$$

$$+ \frac{b}{2} \varphi - \left(\frac{b}{2} - h \right) \frac{\rho}{2}$$



$$M = \frac{a}{\cos \varphi} \left[\frac{b}{2} \cos \varphi - \frac{a}{2} \sin \varphi - h \right] \left(h + \frac{a}{2} \right) \frac{\rho}{2}$$



$$h^2 = \frac{b^2}{12} \quad \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{12ab}$$

$$a > b \sqrt{6}$$

$$\frac{1}{b} \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{12} \right]$$

$$\frac{1}{2b} \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{6} \right]$$

$$y = a_2 + \frac{(a_1 - a_2)x}{b}$$

$$= \frac{a_2 \frac{x^2}{2} + \frac{(a_1 - a_2)x^2}{b}}{a_2 x + \frac{(a_1 - a_2)x^2}{b}} = \frac{\frac{a_2 b^2}{2} + \frac{(a_1 - a_2)b^2}{3}}{a_2 b + \frac{(a_1 - a_2)b}{2}}$$

$$\xi = \frac{\int y dx}{\int y dx}$$

$$\xi = \frac{\frac{a_1 b^2}{3} + \frac{a_2 b^2}{6}}{\frac{a_1 + a_2}{2}} = \frac{2b}{3} \frac{a_1 + \frac{a_2}{2}}{a_1 + a_2}$$

$$\eta = a_2 + \frac{(a_1 - a_2)}{3} \frac{a_1 + \frac{a_2}{2}}{a_1 + a_2}$$

$$a_1 + a_2 = b - 2h \cos \varphi - 2h \frac{b}{a_1} \sin \varphi = b - \frac{2h}{a_1} \sin \varphi$$

$$\rho = \frac{b}{2} \sin \varphi + \frac{a}{2} \cos \varphi - \frac{b}{2} \cos \varphi - \frac{a}{2} \sin \varphi$$

$$a_1 = \frac{b}{2} - h \cos \varphi + \left(\frac{a}{\cos \varphi} - h \frac{b}{\sin \varphi} \right) \sin \varphi$$

$$a_2 = \frac{b}{2} - h \cos \varphi - \left(\frac{a}{\cos \varphi} + h \frac{b}{\sin \varphi} \right) \sin \varphi$$

~~$$(K + m r^2) \omega = c$$~~

$$r \omega^2 = \frac{c}{r^2} + \frac{c^2}{(K + m r^2)^2} = \frac{c}{m r^3}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{c}{\omega}}$$

$$K \omega + m \omega \sqrt[3]{\frac{c}{\omega}} = c$$

$$K \omega + m \sqrt[3]{c} \cdot \omega^{\frac{2}{3}} = c$$



$$K \Omega + m r^2 \omega = c$$

$$r \omega^2 = \frac{c}{r^2}$$

$$K \Omega + m \omega \sqrt[3]{\frac{c}{\omega}} = c$$

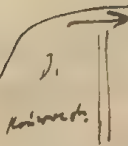
$$\frac{m \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{\omega}} = c - K \Omega$$

$$\omega = \left[\frac{m \sqrt[3]{c}}{c - K \Omega} \right]^3$$

$$K \frac{d\Omega}{dt} = -\beta \frac{(\Omega - \omega)}{r^3}$$

$$K \Omega + m r^2 \omega = c$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{c}{\omega}}$$



Janis purkops 92/93, jūli, integrācija stadi

jūli, integrācija stadi, integrācija stadi



Chłopiec ślizgał się z górki lodowej, która nachylenia



$$\tan \alpha = \frac{3}{4} = \varepsilon \quad (\text{niebieskie tancerze})$$

$$M \frac{dx}{dt} = -\varepsilon M g$$

niebieskie tancerze



$$\int 2\pi r^2 \sin^2 \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 2\pi \frac{a^5}{5} \cdot 2 \cdot \frac{2}{5}$$

$$= \frac{8}{15} a^5 n = \frac{8}{15} \pi a^3 \cdot \frac{2}{5} a^2$$



kula rusza z początkową prędkością c obracając się

$$M \frac{dx}{dt}$$

$$M \frac{dx}{dt} = \varepsilon M g$$

$$v = c - \varepsilon g t$$

$$K \frac{d\omega}{dt} = 2 M g a$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega - \varepsilon g \frac{M a t}{K}$$

względna prędkość: $v - a \frac{d\omega}{dt}$

oraz jeżeli ω zmieni się to kula przemieści się o $\varepsilon g t$ kula jeszcze przemieści się o $\varepsilon g t$ obracając, to jeszcze więcej

$$\omega - \varepsilon g \frac{M a}{K} \varepsilon g > 0 \quad \text{to kula przemieści się o więcej}$$

$$\omega K > M a c$$



$$\text{tutaj będzie stała dopóki} \quad v = a \frac{d\omega}{dt}$$

$$c - \varepsilon g t = a \left(\omega - \varepsilon g \frac{M a}{K} t \right)$$

oraz razem obracać

$$x = \frac{c - a \omega}{\varepsilon g \left[1 - a \frac{M a}{K} \right]}$$

z początkową

$$v = c - \frac{c - a \omega}{1 - a \frac{M a}{K}} = \frac{a \omega - a \frac{c - a \omega}{1 - a \frac{M a}{K}}}{1 - a \frac{M a}{K}} = a \frac{\omega - \frac{c - a \omega}{1 - a \frac{M a}{K}}}{1 - a \frac{M a}{K}} = a \frac{\frac{\omega (1 - a \frac{M a}{K}) - c + a \omega}{1 - a \frac{M a}{K}}}{1 - a \frac{M a}{K}} = a \frac{\omega - \frac{c}{1 - a \frac{M a}{K}}}{1 - a \frac{M a}{K}}$$

Widzimy, że energia nie ulega zmianie, bo

$$M c = \int F dt$$

$$K \omega = \int \tau dt$$

$$\frac{M c}{K \omega} = \frac{1}{b}$$

$$\frac{\omega}{c} = \frac{M}{K} b$$

$$\frac{K}{M} = \frac{2 M a^2}{5}$$

$$\frac{M}{K} = \frac{5}{2 a^2}$$

$$v = a c \frac{M}{K} \frac{b - a}{1 - M a^2 / K}$$

$$v = \frac{5 c}{2 a} \frac{b - a}{1 - \frac{5}{2}} = c \frac{(1 - \frac{b}{a})}{1 - \frac{5}{2}} = \frac{5 c}{3} (1 - \frac{b}{a})$$

Balansowanie łaski

tem. Technicznie, co najmniej powinno być przesunięcie punktu ciężkości o długość δ



Przechylenie stat.: siła ciężkości musi być równa podciągającemu, ^{przechylenie} przesunięciu δ

$$\frac{1}{2} K \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = Mg a (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

$$= Mg a \frac{\varphi^2 - \varphi_0^2}{2}$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 - \varphi_0^2}} = \sqrt{\frac{Mga}{K}} dt$$

$$a \varphi_0 = \delta$$

$$a \varphi = \varepsilon$$

$$\frac{\varepsilon - \delta}{\delta}$$

$$K \varphi \ddot{\varphi} = Mga \varphi \ddot{\varphi}$$

$$\varphi = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}$$

$$A = B = \frac{\varphi_0}{2} \begin{cases} \varphi_0 = A + B \\ 0 = A - B \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{2} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})$$

$$\frac{\varepsilon - \delta}{\delta} = \frac{a (\varphi - \varphi_0)}{\delta} = \frac{a \varphi_0}{\delta} \left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - 1 \right)$$

$$= a \varphi_0 \frac{\alpha^2 t^2}{2} = \delta \frac{\alpha^2}{2} t$$

$$\alpha^2 = \frac{Mga}{K}$$

masa i sztywność pręta $\frac{Mga}{K}$

$$\left. \begin{aligned} \text{dla pręta jednorodnego} & K = \frac{a^3}{3} \rho g \\ M &= a \rho g \end{aligned} \right\} \rightarrow = \frac{a}{3}$$

coś drugie, ten trochę balansować

Coś innego z tym ciężar pręta samemu kółu uwzględnić: $K = a^2 M$

$$\frac{K}{Ma} = a \quad \text{zatem tym więcej krzywizna, tym jest} \\ \text{bardziej 3 razy tak długi.}$$

Wzrost krzywizny kłóć się wyprowadzić na krzywiznie lub też rachunkiem innym

Siły odśrodkowe obracania kół



$$M = \frac{K}{R} \frac{v}{R} = Pl$$

$$\frac{K}{R} = \frac{2Pl}{R^2}$$

$$\frac{2v^2 R}{Rl}$$

$$v = \sqrt{\frac{Rl}{2R}}$$

$$R = 200 \text{ cm}$$

$$= 375 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$l = 143.5$$

$$m \frac{dx}{dt} = -kx$$

141

$$x = \dots$$

$$L + U = \omega t$$

$$m \frac{dx}{dt} = -kx + b \sin \omega t$$

$$x = a \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{b}{k - m \omega^2} \sin \omega t$$

$$\beta = \frac{2n}{T} \quad \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2n}{T_0}$$

$$d(L+U) = dP$$

$$T = T_0 \quad x = 0$$

$$m \frac{dx}{dt} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}$$

$$x = A e^{-\frac{\gamma}{2m} t} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}} t + \epsilon \right)$$

$$= A e^{-\frac{\gamma}{2m} t} \cos(t + \epsilon)$$

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4km}} \neq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \left[1 - \frac{\gamma^2}{8km} \right] \dots$$

$$\text{Maximum } \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{\alpha}{\rho} = \sigma \gamma (H + z)$$

$$\alpha = \frac{1}{I} \log \frac{A_1}{A_2}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -k\theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} + E \sin \omega t$$

$$\theta = A \sin(\omega t - \epsilon)$$

$$\theta = \frac{\gamma \gamma}{k - \gamma^2}$$

$$\text{if } n_f \leq n_0 \quad n_0 > \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\gamma}{2} > \alpha > 0$$

$$n_f = n_0 \quad \alpha = \frac{\gamma}{2}$$

$$A = \frac{E}{\sqrt{(k - \gamma^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

$$V = \frac{f}{a} (x_1, \dots) \quad W = \frac{f}{2a} (y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_2)^2 \dots + y_n^2)$$

$$n=2). \quad W = \frac{f}{2a} \left[\left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{y_2 - y_1}{2} \right)^2 \right]$$

$$T = m \left[\left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{2} \right)^2 \right]$$

~~the~~

~~the~~

$$V = \frac{2f}{ma} \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}$$

$$V = 2 \sqrt{\frac{f}{ma}} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} = \sqrt{\frac{E_n}{a_n}}$$

$$\frac{C_k}{a_k} = \frac{f}{ma} \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}$$

$$L = \frac{m}{2h} [y_1^2 + y_2^2 + \dots] \quad W = \frac{f}{2a} [y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_2)^2 + \dots]$$

$$\frac{m a y_k^2}{h^2} = + \frac{f}{a} (y_{k-1} + 2y_k + y_{k+1})$$

$$y_{k+1} = A_k (\cos \omega t - \epsilon_k)$$

$$- m A_k \omega^2 = - \frac{f}{a} [A_{k-1} - 2A_k + A_{k+1}]$$

$$A_k = P \sin k\beta = P \sin \left(\frac{k\pi}{n+1} \right)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{m a \omega^2}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} = \sin(k-1)\beta - 2\sin k\beta + \sin(k+1)\beta$$

$$= 2\sin^2 k\beta \cos \beta - 2\sin k\beta$$

$$\frac{m a \omega^2}{2h^2} = -(\omega\beta - 1) = 2\sin^2 \frac{\beta}{2}$$

$$\omega = 2\sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{f}{a_n}} = 2\sin \frac{\pi h}{2(n+1)} \sqrt{\frac{f}{a_n}}$$

Wohania stłku

$$K \frac{\partial p}{\partial t} = a \sin \omega t - S_g$$

142
 $K \frac{\partial p}{\partial t} = a \sin \omega t - S_g$
 $p = -\frac{a}{K(\omega^2 - S^2)} \sin \omega t + S \sin \omega t$
 $S = K \omega^2$

$$p = -\frac{a}{K(\omega^2 - S^2)} \sin \omega t +$$

$$= -\frac{a}{K(\omega^2 - S^2)} \sin \omega t + S \sin \omega t$$

ale potrzebna dyskusja z wykł. zresztą jeżeli chodzi o to

Łódź ^{z filmu} kolyma się i musi się wyrażać

stetich chęć ten film i zastępić przez mi odległość

dla $\alpha = \beta$ rezonancja i maksymum

Stwierdzenie

stopy i dawać

muszą słuchać (telefon); nie dobrać jeżeli chodzi o wzmocnienie
(fotograf)

Absorpcja światła

Fale pływają: Długość mowa

Temperatura

Drgania kulki pływają woda kontynuacja rozmowy

czas dla pływaka: kulki 14 34

z pomocą umiarkowanej 14 30-24

gdzieś woda obrotu 4^{ta} to rezonans

powstanie krzywizny (Dowin)

Wohania się wzajemnie kulki one

Kataryno potrzebna i umiarkowana

język umiarkowany

Archimedes

Chandler 205 tonów dla utrzymania

927 (płytki) nie stół,

$\alpha = 4.5^\circ$

umiarowy umiarkowany

$$K \text{ zlini } \frac{2}{5} M a^2$$

$$\frac{2}{5} (6.3)^5 \frac{4}{3} \pi \cdot 5.6 \cdot 10^{30}$$



$$K \Omega + k \omega - K_0 \Omega_0$$

143

K Self str:

$$60 \cdot 10^3 \cdot 400 \cdot 2 \left(\frac{6.3}{2} \right)^3 \cdot 10^{18} \cdot \pi$$

$$\frac{\rho k_m}{k} = \frac{6300 \pi}{2}$$

$$\frac{6300 \cdot \pi \cdot 2500}{2 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 48} = 50 \text{ dni}$$

$$\frac{10^{24} \pi \cdot \frac{243}{32} (6.3)^3}{10^{30} \pi \cdot \frac{8}{15} 5.6 \cdot (6.3)^5 \cdot 50} =$$

$$\frac{45 \cdot 1}{22 \cdot 5.6 \cdot (6.3)^2 \cdot 5 \cdot 10^7} = \frac{1}{10^{10}}!$$

= 1 mm!

Time na pikn pikn

$$\frac{25 \cdot a^4 \left(\frac{a}{3} \right)^3}{\frac{4}{3} a^3 \pi \cdot \frac{2}{5} a^2 \cdot 5.6} = \frac{1}{36} \frac{\delta}{a} = \frac{10^{-7} \delta}{25}$$

$$= \gamma = \sqrt{\frac{M_2 a}{K \omega}}$$

$$m a^2 \frac{\delta^2}{\delta^2 t} =$$

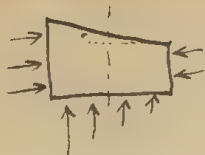
~~K 0.5~~
premieru boane

$$\frac{2 \delta a \frac{a}{3} \cdot a^2}{\dots} = \frac{1}{4} \frac{\delta}{a} = \frac{10^{-7}}{4} \delta$$

Chandler 428 d: 4.5 m

zanat 305

uprightu pik stoh



$$r_{\text{mass}} = \frac{b \cdot \Delta y}{12} \neq \frac{b^2}{12} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\int M_{ad} dx}{K \omega}$$

$$= \frac{b^2}{12} \frac{1}{K \omega} \int \frac{dy}{dx} dx$$

$$\frac{2\pi a \cos(2\pi)}{\lambda} \quad \frac{2\pi a \tau}{\lambda} \quad \frac{2\pi a \tau}{\lambda}$$

$$y = a \sin \left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) \right)$$

$$= \frac{b^2}{3} \frac{2\pi a \tau}{\lambda} \frac{1}{K \omega}$$

$$\lambda = 40 \text{ m}$$

$$\tau = 5 \text{ sec}$$

$$b = 10 \text{ m} \quad L = 100 \text{ m atypni}$$

$$a = 2 \text{ m} \quad (\text{width } 7 \text{ m})$$

$$\left(\begin{array}{l} a = 8 \text{ m} \\ \lambda = 150 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{width } 16 \text{ m} \\ \tau = 10 \text{ sec} \end{array}$$

$$= \pi \frac{10^6 \cdot 200 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 10^3} = \frac{2 \cdot 10^9}{12 \cdot 10^3} \neq \frac{2 \cdot 10^5}{K \omega}$$

$$\neq \frac{1}{60} \quad | 1^\circ$$

$$K \omega = 0.0 \cdot \pi \cdot 10^5 \cdot \rho = \frac{2\pi}{n} \cdot 2\pi \rho a^3 \cdot \rho \cdot 10^4$$

$$n = 100$$

$$a = 2 \text{ m} = 10^2 \cdot 2$$

$$K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a \sin \alpha t - S \varphi$$

$$\varphi = A \sin \alpha t$$

$$-K A \alpha^2 = -S A + a$$

$$A = \frac{-a}{K \alpha^2 - S}$$

$$\text{pdy albo } \pm$$

rozwiązanie p



$$\alpha \geq \sqrt{\frac{S}{K}}$$

tenże obciążenie niebądź 2n

jużi myślenie to -A porem
prosta z +A wim

Konkretnie jak

$$\rho = \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10}{4 \pi \cdot 10^6 \cdot 8} = \frac{5}{\pi} \cdot \frac{10^3}{8} \neq 10^2 \cdot (10^2)^2$$

można pisać dookoła + B. p. (y + w), y = \sqrt{\frac{F}{K}}
dla uśrednienia p. p. t. w. i.
można pisać dookoła + B. p. (y + w), y = \sqrt{\frac{F}{K}}
dla uśrednienia p. p. t. w. i.

A = 00 jużi wim

$$\varphi = +\mu \theta \quad \text{koľo}$$

$$= +\mu \arcsin \frac{x}{r}$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{+\mu}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) = +\mu \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r^3} = \frac{\mu}{r^2} \frac{y}{r}$$

$$\omega = \frac{1}{r^2}$$

$$\varphi = +\mu \arg z$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = +\frac{\mu}{r} \frac{x}{r} = +\frac{\mu}{r} \cos \theta$$

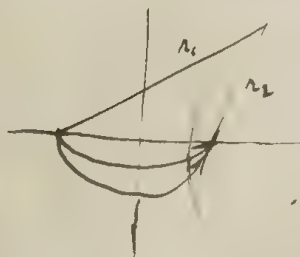


Naturálne pojmy: $2\pi\alpha V_{\text{unit}}$
 dľa $2\pi\alpha$
 $V_{2\pi\alpha}$
 = sile $2\pi\alpha$

$$\text{Jižli } \varphi_1 = \mu \arg z_1$$

$$\varphi_2 = -\mu \arg z_2$$

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \mu(\theta_1 - \theta_2) = \text{koľo}$
 to summa takie radon' ugnj
 $+i(\theta_1 - \theta_2) =$



$$\varphi = \mu \arg \frac{z_1}{z_2} = c = \frac{\mu}{2} \arg \frac{(x-a) + iy}{(x+a) + iy}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$(x-a)^2 + y^2 = [(x+a)^2 + y^2]$$

koľo

$$\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} = c$$

$$\arctan \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1 + \frac{y^2}{(x-a)(x+a)}} = \arctan \frac{y(x+a) - y(x-a)}{x^2 - a^2 + y^2}$$

Podrobné aritmetické jižli: $\text{dľa } a=0$:

$$\arg \frac{1 + \frac{2ax}{x^2 + y^2}}{1 + \frac{2ax}{x^2 + y^2}} = \arg \frac{1 - 2a \cos \theta}{1 + 2a \cos \theta} = -2a \cos \theta$$

$$\arg \frac{1-x}{1+x} = -x - \frac{x^2}{2} - \dots$$

$$\} = -x^2$$

$$\cos^2 \theta = \cos \theta$$

odmiera: $\cos^2 \theta = \cos \theta$
 vlnka: $\cos^2 \theta = \cos \theta$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{y=0} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{y=0}$$

1145

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right)_{y=0}$$

wzr

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} - g \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

Rach przydziny wzr przypuszczenie

$$\psi = (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t) f(y)$$

$$-\alpha^2 \tilde{\psi} = g \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}$$

$$-\alpha^2 f = g \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{dla } y=h$$

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\alpha^2}{g} \quad \text{wzr} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad y=h$$

$$f = Z (A \cos \beta x + B \sin \beta x) F(y)$$

N.p.

$$f = \cos \beta x F(y)$$

$$\psi = \cos(\alpha t + \beta x) F(y)$$

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\alpha^2}{g}$$

Wstawiamy to do $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} = 0$

$$-\beta^2 F + \frac{d^2 F}{dy^2} = 0$$

$$F = (G e^{-\beta y} + H e^{+\beta y})$$

Na dnie t.j. $y=h : \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$

zatem

$$-G e^{-\beta h} + H e^{\beta h} = 0$$

$$H = G e^{-2\beta h} = K e^{-\beta h}$$

$$G = K e^{\beta h}$$

$$F = K [e^{\beta(h-y)} + e^{-\beta(h-y)}]$$

Warunki dla prędkości $\frac{\partial \varphi}{\partial t} - g \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$

$$-a^2 F - g \frac{dF}{dy} \Big|_{y=0}$$

$$-a^2 \left[e^{-\rho h} + e^{\rho h} \right] - g \beta \left[-e^{\rho h} + e^{-\rho h} \right] = 0$$

$$a^2 = g \beta \frac{e^{-\rho h} - e^{\rho h}}{e^{-\rho h} + e^{\rho h}}$$

zatem $\varphi = K \left[e^{\rho(h-y)} + e^{-\rho(h-y)} \right] \cos \beta x \left[A \cos at + B \sin at \right]$

$$\eta = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} : \quad \eta = K \left[e^{-\rho h} - e^{\rho h} \right] \cos \beta x \left[A \cos at + B \sin at \right]$$

randeń tyż tożs

$$C \cos(at - \beta x)$$

gdzie $at - \beta x = \text{const}$ oznacza

$$\frac{x}{\beta} = \frac{a}{\beta} = \text{prędkość fali}$$

$$a = \sqrt{\frac{g}{\beta} \cdot \frac{e^{\rho h} - e^{-\rho h}}{e^{\rho h} + e^{-\rho h}}}$$

Strężenie fali oznacza prędkość w kierunku strężenia to

warunki $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad x = \sqrt{L}$

że jeżeli wstrząsanie strężeń nastąpi to relacja między tymi strężeniami

strężeń fali: $\beta L = 2\pi$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\eta = K \left[e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}} + e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} \right] \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \left[\dots \right]$$

traz jisti h budo vltin ~~traz~~ v prirani do 1 t

$$y = -K e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

$$a = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

jisti h budo mla: $e^{ph} - e^{-ph} = 1 + ph - (1 - ph) = 2ph$

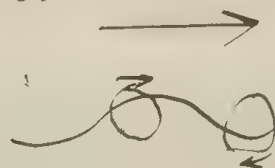
$$a = \sqrt{\frac{g}{\rho} \frac{2ph}{2}} = \sqrt{gh}$$

vz mchizim ot dtyjoi fel

fel tyni zini: mchizim pto...
mchizim mchizim...
mchizim mchizim...
mchizim mchizim...

| h in feet | λ in feet | | |
|-------------|-------------------|-------|-------|
| h (feet) | 1 | 100 | 10000 |
| 1 | 2.26 | 5.67 | 5.67 |
| 100 | 2.26 | 22.62 | 56.7 |
| 10000 | 2.26 | 22.62 | 2262 |

$$\begin{aligned} L &= 2000 \\ \rho &= 10 \\ a &= 200 \\ 200.86000 \\ &= 20.107 \end{aligned}$$



Rozklad v vlny samej:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + x \frac{\partial L}{\partial x} + y \frac{\partial L}{\partial y} + z \frac{\partial L}{\partial z} =$$

$$\frac{dL}{dt} = u = + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \rho g \frac{e^{-\rho(h-y)} - e^{-\rho(h+y)}}{e^{-\rho(h-y)} + e^{-\rho(h+y)}}$$

$$x = \int u dt = -\frac{\rho}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$y = \frac{\rho}{a} e^{-\rho y}$$

introduco

wie a tto sa dta mchizim y de b mchizim y
jisti sad h budo vltin to pravi koto

da pto pto pto

$$-\rho \sin(\alpha t - \beta x)$$

$$\dots \sin(\alpha t - \beta x)$$

$$\frac{\rho}{a} \sin(\alpha t - \beta x)$$

$$\frac{\rho}{a} e^{-\rho y} \sin(\alpha t - \beta x)$$

zota
eliso

$$a \text{ to sa } a = \frac{\rho}{a}$$

$$b \frac{\rho}{a} e^{-\rho y}$$

sigmifika
v pto h dta

Entei problemi potpuno ~~rešeno~~ rešeno u kretanju (zasebno. vremenom ~~u~~ vglada po stran drzajeb)
 Tj. ako dva broja drzajeb ili jednako, pripadaju i vglaju mora da ni rešeno.
 analiza harmonizacija, pripadajućim staj.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

$$\varphi =$$

$$\varphi =$$

elektromagn. analiza

$\omega \parallel i$

φ 7 skatane praga elektr.

φ 4

φ 1

u }
 v }
 w }
 sit magnet.

To znaci da istovremeno

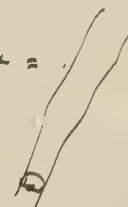
potpuno rešavaju

$$F = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\varphi}{r} dxdydz$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ itd}$$

Analiza. Ograniceno je da se dobija na neposrednom
 pristupu jednako pravu liniju vglaju φ_i je u celoj prostornoj
 svojstvu drzajeb itd. To znaci jednako vglaju.

Linije vglaju, struge vglaju = vglaju demontazne

priznaci =  $2\pi r \cdot w = 2q w$
 $= \frac{1}{2} q w$

$$AA' + A'D' + DD' + D'A =$$

$$AA' = DD' \text{ zatim } q w = \text{magnet}$$



$q w = \frac{1}{2} q w$ ^{notacija}

Foto poudarovani inuq qdch

osmuni kamini

Ship races

Koska v udie

uska

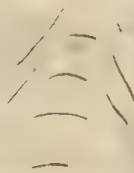


foto v stromyho poudarovani

$$U = \frac{M}{2} \omega$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \omega} = -\frac{M}{2}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \omega} = -\frac{M}{2}$$

$$\frac{M}{R^2} = \omega^2 R$$

$$\omega^2 = \frac{M}{R^3}$$

Uder.

$$U = \frac{KM}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{R^2}}}$$

$$= \frac{\omega^2}{2} (R - a \cos \theta)^2$$

ni maada, zomni mi vinyi

jako vob ntygm kds 0
tykto vobni nke dndkne



$$= \frac{M}{R^2} \left[\left(1 - 2 \frac{R}{R} \cos \theta + \frac{a^2}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{R} \cos \theta \right)^2 \right]$$

$$= \frac{M}{R} \left[1 - \frac{a \cos \theta}{R} + \frac{a^2}{2R^2} + \frac{3}{2} \frac{a^2 \cos^2 \theta}{R^2} \right] - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2a}{R} \cos \theta + \frac{a^2}{R^2} \right]$$

$$= \frac{M}{R} \left[\frac{1}{2} + \frac{a}{2R} + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{R^2} \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$$

vob ntygm vinyi tek ze vndyke dndkne:

Kosky pndk qinyi kds jndkne, z jndkne pndkne
shotov, vob nke dndkne vob nkyk

$$= \omega R$$

$$\omega R \frac{a \cos \theta}{x}$$

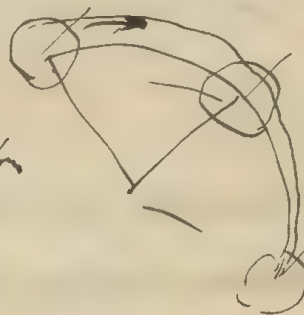
Ostnyge vobndkne: $\omega(R - a \cos \theta)$

$$U = \frac{-M}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{R^2}}} + \omega(R - a \cos \theta) = \frac{M}{2} \left[1 - \frac{a \cos \theta}{R} + \frac{a^2}{2R^2} + \frac{3}{2} \frac{a^2 \cos^2 \theta}{R^2} - \frac{a \cos \theta}{R} \right]$$

$$= \frac{M}{2R^2} [1 + 3 \cos^2 \theta]$$

$$\propto \frac{M}{R^3}$$

0



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$r^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{a^2} \right)}$$

$$= \frac{b^2}{1 - \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \theta} \neq b^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \theta \right)$$

$$= a^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \theta \right)$$

$$U + \frac{g a^2}{r} = \text{const}$$

$$U + \frac{g a^2}{r} = \text{const}$$

$$\frac{a^2 M}{2R^3} (1 - 3 \cos^2 \theta) + \frac{g a^2}{r} = \text{const}$$

$$\frac{g a^2}{a+z} = g a (1 - \frac{z}{a})$$

$$\frac{a^2 M}{2R^3} (1 - 3 \cos^2 \theta) + g a (1 - \frac{z}{a}) = \frac{a^2 M}{2R^3} + g a$$

$$g z = 3 \frac{a^2 M}{2R^3} \cos^2 \theta$$

$$z = \frac{3 a^2 M}{2R^3} \cos^2 \theta$$

$$\frac{M m}{R^2} = m \omega^2 R$$

$$\frac{M}{R^2} = \omega^2 =$$

$$\frac{75 \cdot 10^{28} \cdot 10^6}{(60)^2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 385 \cdot 10^{10}}$$

$$= \frac{3 \cdot 75 \cdot 10^{28}}{2 \cdot 385 \cdot 36 \cdot 10^{16}} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10^{-8} = \frac{9}{4} \cdot 10^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{8} \cdot 10^2 \neq 1$$

Tide frequency from



$\frac{1}{2}$ division
 $\frac{1}{2}$ division division

opposite to this frequency did not explain entrance

$\frac{1}{2}$ milliseconds division
 $\frac{1}{2}$ more "

Spring, neap - tides

Repeatability of earth, impossibility of this shell

Caution, Note

$$\frac{m_a}{m_g} = \frac{75}{5979} \neq \frac{1}{80}$$

$$\pm \frac{1.25}{100} \neq \frac{1}{80}$$

$$\frac{m_a}{m_g} = \frac{200 \cdot 10^4}{6} = \frac{1}{3} \cdot 10^6$$

$$\frac{m_a}{m_g} = \frac{8}{3} \cdot 10^7$$

$$\frac{R_0}{R_g} = \frac{1500}{385} \cdot \frac{1761}{5855} = \frac{5906}{5906}$$

$$= 390 \quad 17718$$

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot 10^6 \cdot 8}{(385)^3} = \frac{8}{3} \cdot \frac{10^7}{(385)^3} \cdot 10^6$$

$$= \frac{80}{3 \cdot 59} = \frac{8}{18}$$

$$= \frac{4}{9} \neq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \text{Drift}$$

$x=0$

$x=0$

$$\psi = \sum (A \sin \alpha t + B \cos \alpha t) (M \sin \beta x + N \cos \beta x)$$

$$\sum (A \sin \alpha t + B \cos \alpha t) \beta \sin \beta x = \text{Drift}$$

$$\alpha = \beta$$

spine type magnetron mini form tube

Volterra's eq. (derivation)

$$\frac{dx}{dt} = -kx + M \sin \alpha t$$

$$x = A \sin \alpha t + N \cos \alpha t$$

$$-A(\alpha^2 - k^2) \sin \alpha t = M \sin \alpha t [M - k^2 N + \alpha^2 N]$$

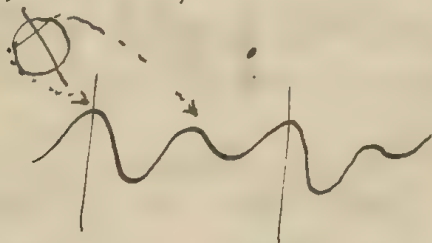
$$\alpha = k$$

$$N = \frac{M}{k^2 - \alpha^2} = \frac{M}{k^2 - \alpha^2}$$

$$x = A \sin \alpha t + \frac{M}{k^2 - \alpha^2} \sin \alpha t$$


Resonance!

Why tube moves:



| | | | |
|---------|------|------|------|
| Sally | 2.54 | 1 | 6.3 |
| Donna | 5.34 | 7.5 | 12.4 |
| Carl | 5.24 | 12.7 | 13.8 |
| Margot | | | |
| Chaplin | | | |

vzr nie ma nic waznego dla kina w cieniu tylnego albo w miejscu zamkniętym albo w porównaniu

Wzrost:  wzrost kłami podskórny z punktu

z daniem: natężenie w pewnym miejscu nie zmienia się z czasem

Jedną z dróg do tego na powierzchni wzdłuż \vec{r} to $\int \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$ więc i to samo powstaje tak samo

vzr - podskórny wzr - wewnętrzny przez linię wzdłuż

Wzr - zewnętrzny - kłami - do wewnątrz - wzdłuż linii wzdłuż, która jest wzdłuż linii
 Wzr - kłami - kłami - do wewnątrz - wzdłuż linii wzdłuż, która jest wzdłuż linii

Kłami - wzdłuż linii wzdłuż albo wzdłuż linii
 N.p. wzdłuż linii wzdłuż (wzdłuż linii wzdłuż) wzdłuż linii

$$\vec{r} = \vec{r} = 0$$

z



Wzrost - jedyną drogą jest wzdłuż linii wzdłuż



Wzrost - jedyną drogą jest wzdłuż linii wzdłuż z wzdłuż linii wzdłuż

Wzrost - jedyną drogą jest wzdłuż linii wzdłuż

Wzrost - jedyną drogą jest wzdłuż linii wzdłuż

Wzrost - jedyną drogą jest wzdłuż linii wzdłuż

Wzrost - jedyną drogą jest wzdłuż linii wzdłuż

Wzrost - jedyną drogą jest wzdłuż linii wzdłuż

Wzrost - jedyną drogą jest wzdłuż linii wzdłuż

Wzrost - jedyną drogą jest wzdłuż linii wzdłuż

Wzrost - jedyną drogą jest wzdłuż linii wzdłuż

Wzrost - jedyną drogą jest wzdłuż linii wzdłuż

Potencjal etc.

u i v

$$u = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$v = + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint \zeta_2 \, dx \, dy$$

zbieganie

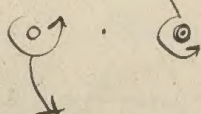
$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

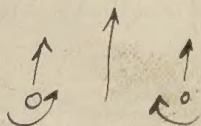
$$\varphi = \zeta_2 \frac{1}{2\pi} \iint \zeta \, dx \, dy$$

2 wiry prate

Superpozycja



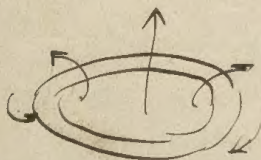
obracają się w kierunku przeciwnym



wzdłuż osi kierunku \perp

tak samo jak w wodzie płynącej etc.

Prędkość wiru



wzdłuż osi kierunku \perp która jednak może w
porównaniu z prędkością być równą zero

Związek istniejący pomiędzy prędkością wiru a prędkością przepływu

2 obrotu w tym samym
kierunku

obrotu do przeciwnego

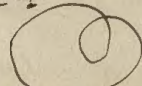
~~Prędkość~~ Atomy Thomsona

Łożysko między innymi

J. J. Thomson

teoria prądu Heksa (wir prate)

wir 2 i 2 tony



etc.

Jedną jednostkę wiru rozmieszczone i ich prędkości to wynosi $u = 2$
 $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ etc. , co można łatwo sprawdzić doświadczalnie

Wobec tego samo φ elektryczności w ogóle opóźnieją rekted funkcji wiru.
Oczywiście jednakże jedna wir i φ (prędkość) (a w niektórych wypadkach prędkości tobie prędkość prędkości)

teilchen infolge Anwesenheit des flüssigen Zwischenmediums aufeinander hydrodynamische Fernkräfte ausüben müssen. Svedbergs Versuche müssen unter anderem auch zur Warnung dienen, daß man bei Berechnung der Avogadro'schen Zahl nach der Perrinschen Methode nur sehr verdünnte Emulsionen benutzen darf.

§ 10. Wenn es sich nicht um ultramikroskopische Teilchen, sondern um eigentliche Moleküle handelt, welche man nicht zählen kann, haben wir doch noch ein indirektes Mittel, um jene Ungleichförmigkeiten der Dichte und ganz analog auch die Ungleichförmigkeiten der Konzentration gemischter Gase oder Flüssigkeiten zu erkennen: das Tyndallsche Opaleszenzphänomen, hervorgerufen durch die mit den Dichteänderungen verbundenen Unterschiede des Brechungsexponenten.

Für den scheinbaren Absorptionskoeffizienten eines gasförmigen oder flüssigen Mediums, welcher mit dessen Opaleszenzvermögen eng zusammenhängt, erhalten wir durch Kombination der bekannten, von Lord Rayleigh abgeleiteten Formel für trübe Medien mit der Formel (7) und der Lorentz'schen Relation zwischen Dichte und Brechungsindex in ganz einfacher, wenn auch nicht von Bedenken freier Weise die Formel¹⁾

$$h = \frac{8}{27} \frac{H \Theta}{N} \frac{\pi^3 (n^2 - 1)^2 (n^2 + 2)^2}{\lambda^4} \left(- \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p} \right), \quad (9)$$

deren Ableitung von Einstein durch eine sehr scharfsinnige explizite Berechnung der elektromagnetischen Wellenstrahlung bestätigt worden ist. Dieselbe wird für ein ideales Gas identisch mit der Formel, durch welche Lord Rayleigh die blaue Farbe des Himmels erklärte, indem er die heute wohl nicht mehr zu haltende Annahme machte, daß die Moleküle der Luft solche Diffraktionserscheinungen hervorrufen, als ob sie leitende Kugeln wären. Andererseits erklärt sie das Auftreten der auffallenden Opaleszenzerscheinungen, welche Gase bei Annäherung an den kritischen Punkt aufweisen, und ebenso auch die Opaleszenz binärer Flüssigkeitsgemische bei Annäherung an den sogenannten kritischen Trennungspunkt. Sie ist auch bis zu einem gewissen Grade quantitativ bestätigt worden, und zwar für den ersten Fall durch die Messungen von Kusom und Kamerlingh Onnes, für den zweiten Fall durch Friedländer vor Jahren angestellte Versuche, welche kürzlich Wo. Ostwald von diesem Standpunkt aus diskutiert hat.

§ 11. Im kritischen Punkt selber tritt eine andere Art Gleichgewicht ein, indem hier die Ausdrücke $\frac{\partial p}{\partial v}$ und $\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}$ Null werden, somit die Verdichtungsarbeit $\chi(\delta)$ proportional wird der vierten Potenz der Verdichtung δ^4 , und im Mittel

9) Vergl. M. v. Smoluchowski, loc. cit. 7); ferner: Phil. Mag. 22, —, 1912; A. Einstein, Ann. d. Phys. 33, 1275, 1910; H. Kamerlingh Onnes u. W. H. Kusom, Comm. fr. Phys. Leyden No. 104, S. 15, 1908; W. H. Kusom,

